ОГЭ 2020
Геометрия 9

Решение задач с развернутым ответом

Открытые банки заданий ОГЭ по математике

Каталог по заданиям,
каталог по умениям,
каталог по содержанию - http://mathgia.ru

каталог по содержанию - http://opengia.ru/subjects/mathematics-9/topics/1

Задания с развернутым ответом

24. ДЕЙСТВИЯ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ФИГУРАМИ, КООРДИТНАТАМИ, ВЕКТОРАМИ

25. ПРОВЕДЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬНЫХ РАССУЖДЕНИЙ

26. ДЕЙСТВИЯ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ФИГУРАМИ, КООРДИНАТАМИ, ВЕКТОРАМИ

Задания части 2 экзаменационной работы направлены на проверку таких качеств геометрической подготовки выпускников, как:

- умение решить планиметрическую задачу, применяя различные теоретические знания курса геометрии;
- умение математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования;
- владение широким спектром приемов и способов рассуждений.

Таблица 12. Планируемый процент выполнения заданий частей 2

Модуль	Геометрия		
Номер задания	24	25	26
Уровень сложности	П	П	В
Ожидаемый процент выполнения	30–50	15–30	3–15

Тренинг и контроль на заключительном этапе повторения

Базовый, повышенный и высокий уровень

Требования к записи решения

- **Должен быть понятен ход рассуждений выпускника и решение должно быть математически грамотным**
- **Нужно нацеливать учащихся на лаконичность** и не требовать подробных комментариев и формулировок теорем, при этом в решении должны быть ссылки на теоремы, чтобы показать, что ученик владеет теоретическим материалом.
- **Если в решении допущена ошибка непринципиального характера** (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся **засчитывается балл, на 1 меньший максимального**.
- (из рекомендаций ФИПИ Учебно-методические материалы для председателей и членов ПК по проверке заданий с развернутым ответом ГИА IX классов ОУ 2015 г.)

Решение задач с развернутым ответом №24-26

Задачи высокого уровня сложности

Требования к записи решения такие же, как и к другим задачам: полное и математически грамотное решение, понятный ход рассуждений учащегося. Запись решения должна удовлетворять указанным выше требованиям, а в остальном может быть произвольной. Нерациональное решение не является основанием для уменьшения числа выставленных баллов. За полное решение выставляется 2 балла.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, чертёж соответствует условию задачи, но пропущены существенные объяснения или допущена вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

3.1. Свойства подобных треугольников. В этом разделе мы выделили задачи, при решении которых используется подобие треугольников. Кроме этого, там используются свойства окружности, которые тоже практически все доказывались в школьном курсе с использованием свойств подобных треугольников. Для применения признаков подобия мы будем использовать свойства углов, полученных при пересечении параллельных прямых секущей. Не обойтись и без свойств равнобедренного треугольника, теоремы синусов и теоремы косинусов.

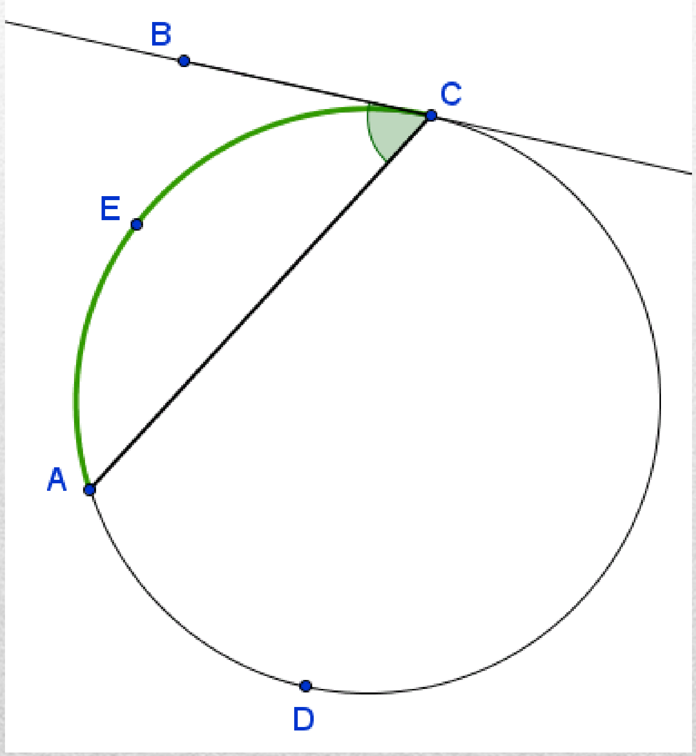
Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны («подобны по двум углам»).

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны («подобны по двум сторонам и углу между ними»).

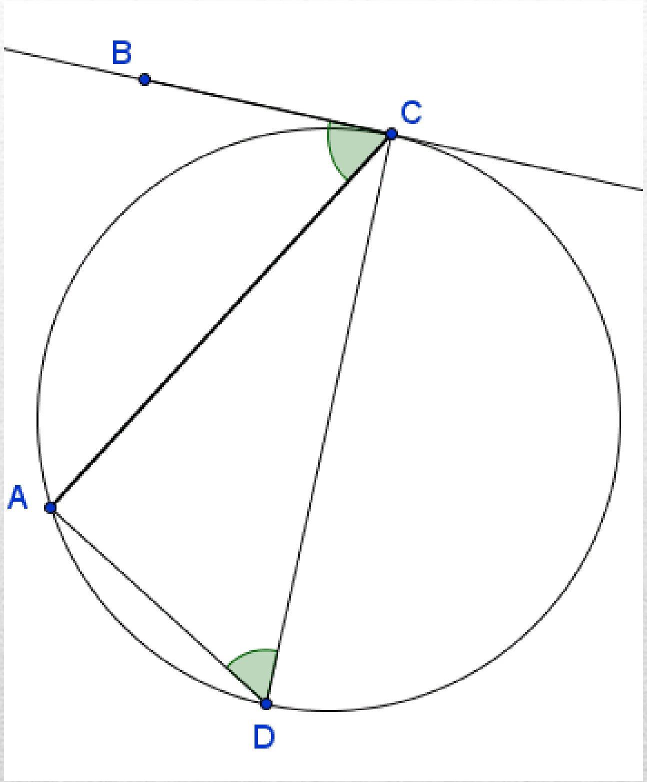
3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны («подобны по трём сторонам»).

Теорема. Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, равен половине угловой величины дуги, высекаемой на окружности этой хордой.



$$\angle ACB = \frac{1}{2}\,\overset{\smile}{AEC}$$

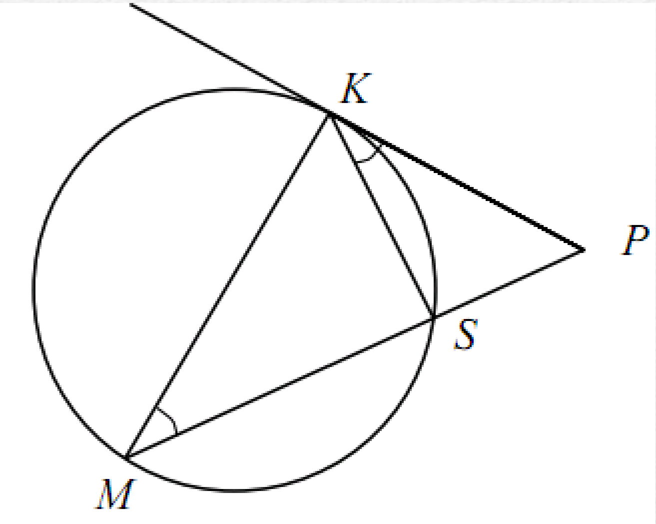
Полезное следствие



$$\angle ACB = \angle ADC$$

Задача 1.

На стороне MP треугольника MPK взята точка S так, что окружность, проходящая через точки M, K и S, касается прямой KP. Найдите MS, если $KM = 18$, $KS = 9$ и $SP = 7$.



Решение.

Треугольники KSP и MKP подобны: угол P общий, а $\angle PKS = \frac{\smile KS}{2} = \angle PMK$, как угол между хордой KS и касательной KP и вписанный угол, опирающийся на дугу KS.

$$\frac{KP}{SP} = \frac{MK}{KS} = \frac{MP}{KP},$$

$$\frac{KP}{7} = \frac{18}{9} = \frac{MP}{KP}.$$

Отсюда

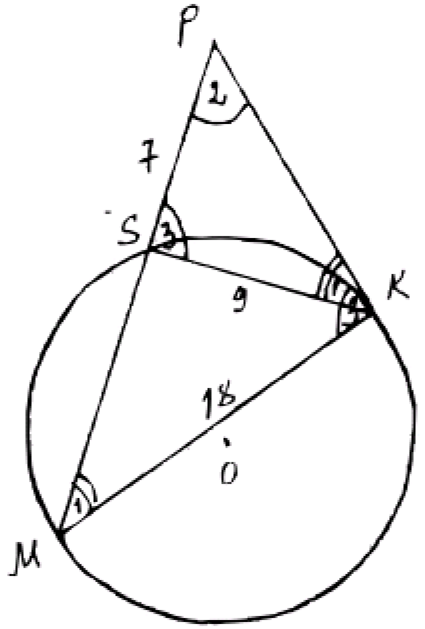
$$KP = \frac{18}{9} \cdot 7 = 14, \frac{MK}{KS} = \frac{MP}{KP},$$

$$MP = \frac{18}{9} \cdot KP = 28, MS = 28 - 7 = 21.$$

Ответ: 21.

Примеры выполнения задачи учащимися

Пример 1.



1) $\angle PKS = \frac{1}{2} \smile SK$,

$\angle SMK = \frac{1}{2} \smile SK$.

$\angle SMK = \angle PKS = \angle 1$.

2) $\angle MPK$ – общий для $\triangle MPK$ и $\triangle SPK$.

$\triangle MPK \sim \triangle SPK$.

$\frac{SP}{PK} = \frac{SK}{MK} = \frac{PK}{MP}$, $\frac{7}{PK} = \frac{9}{18} = \frac{PK}{MP}$,

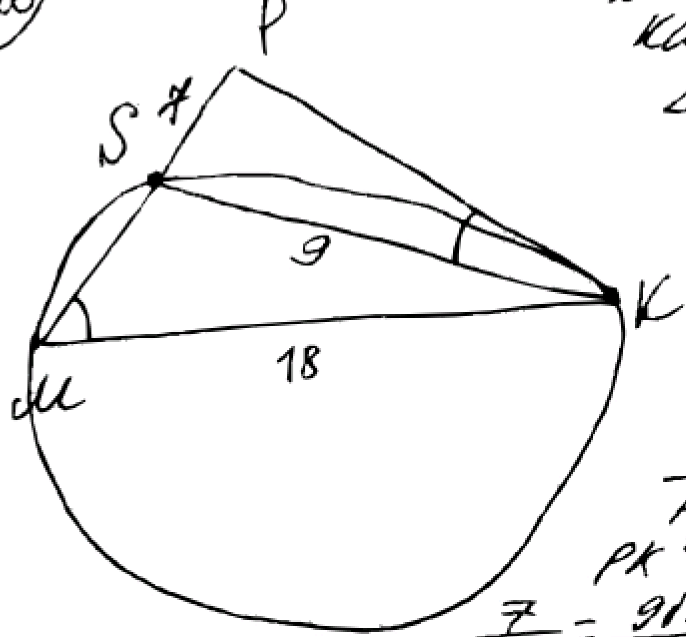
$PK = \frac{7 \cdot 18}{9} = 14$, $MP = \frac{18 \cdot 14}{9} = 28$.

$MS = MP - 7 = 21$. Ответ. 21.

Комментарий. Решение верное, но не указан признак подобия и нет пояснений, как найдены углы. Нужно выставлять 1 балл.

Пример 2.

26



$\angle P$ – общий, $\angle SKP = \dfrac{\smile SK}{2}$ как угол между касат. и хордой, $\angle SMK = \dfrac{\smile SK}{2}$ как впис. угол

по 2 углам $\Delta PSK \sim \Delta PMK$

$\Downarrow$

$$\frac{PS}{PM} = \frac{PK}{MK} = \frac{SK}{PK}$$

$$\frac{7}{PM} = \frac{PK}{18} = \frac{9}{PK}$$

$PK^2 = 9 \cdot 18$, $PK = 9\sqrt{2}$

$\dfrac{7}{PM} = \dfrac{9\sqrt{2}}{18}$, $PM = \dfrac{7 \cdot 18}{9\sqrt{2}} = \dfrac{14}{\sqrt{2}}$

$MS = PM - SP = \dfrac{14}{\sqrt{2}} - 7$

Ответ: $\dfrac{14}{\sqrt{2}} - 7$

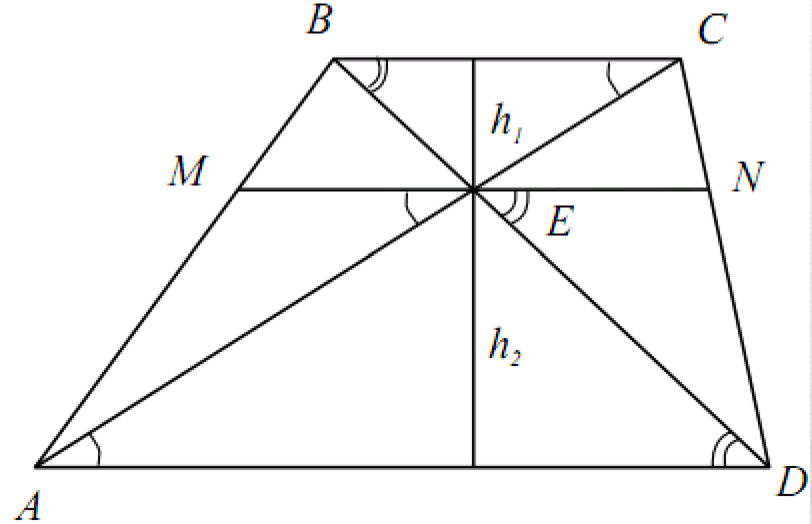
Комментарий. За выполненную запись решения выставляется 0 баллов, так как в решении сделана грубая ошибка: в записи следствия из подобия треугольников в отношениях записаны непропорциональные стороны.

Задача 2.

Основания трапеции относятся как 3 : 8. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?

Решение.

Обозначим трапецию $ABCD$, пусть BC и AD — основания, $BC : AD = 3 : 8$. Обозначим точку пересечения диагоналей за E, и пусть прямая MN проходит через точку E параллельно основаниям и пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Обозначим h_1 и h_2 высоты, опущенные из точки E на основания трапеции BC и AD.



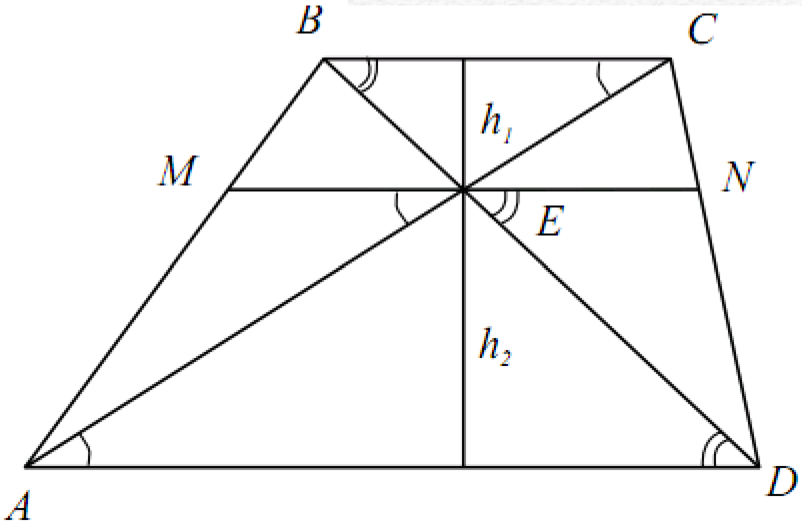
Треугольники BCE и DAE подобны, так как $\angle BCE = \angle DAE$ и $\angle CBE = \angle ADE$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD. Следовательно:

$$h_1 : h_2 = BE : ED = CE : EA = 3 : 8, h_2 = \frac{8}{3}h_1.$$

Треугольники DEN и DBC подобны, так как угол D общий и $\angle CBE = \angle NED$ как соответственные при параллельных прямых BC и MN. Следовательно:

$$EN : BC = ED : BD = 8 : (3+8) = 8 : 11,$$

$$EN = \frac{8BC}{11}.$$



Треугольники AME и ABC подобны, так как угол A общий и $\angle BCE = \angle MEA$ как соответственные при параллельных прямых BC и MN. Следовательно:

$$EM : BC = AE : AC = 8 : 11,$$

$$EM = \frac{8BC}{11},$$

$$MN = EM + EN = \frac{16BC}{11}.$$

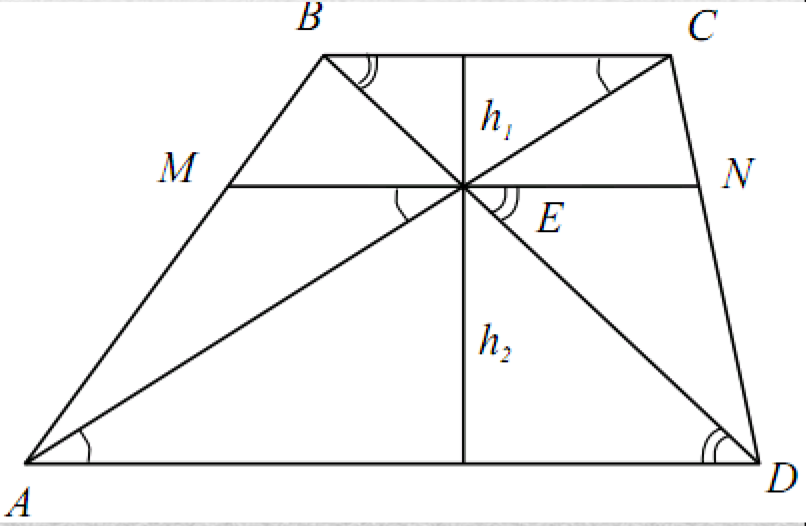
Подставим выражение для MN в формулу площади трапеции:

$$S_{BCNM} = \frac{1}{2}(MN + BC)h_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{16BC}{11} + BC\right)h_1 = \frac{27}{22} \cdot BC \cdot h_1,$$

$$S_{MNDA} = \frac{1}{2}(MN + AD)h_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{16BC}{11} + \frac{8}{3}BC\right)(\frac{8}{3}h_1) = \frac{544}{99} \cdot BC \cdot h_1,$$

$$\frac{S_{BCNM}}{S_{MNDA}} = \frac{27}{22} : \frac{544}{99} = 243 : 1088.$$

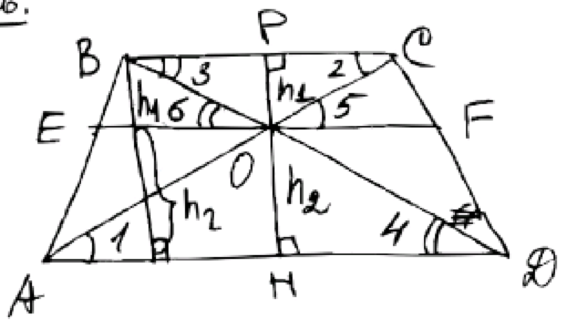
Ответ: 243 : 1088.



Примеры выполнения задачи учащимися

Пример 1.

26.



$\frac{BC}{AD}=\frac{3}{8}$, $BC=3x$, $AD=8x$.

$\triangle BOC \sim \triangle AOD$

(по 2 углам, см. рис.)

$\angle 1=\angle 2$ (н.л., $BC \parallel AD$)

$\angle 3=\angle 4$ (н.л.)

$\Rightarrow h_1 : h_2 = BC : AD = 3:8$, $h_1=\frac{3}{8}h_2$, $h_1+h_2=\left(\frac{3}{8}+1\right)h_2$

$\triangle CAD \sim \triangle COF$ (аналогично) $\Rightarrow$

$OF : AD = h_1 : (h_1+h_2) = \frac{3}{8}h_2 : \left(\frac{11}{8}h_2\right) = \frac{3}{11}$

$OF = \frac{3}{11}AD = \frac{3}{11}\cdot 8x = \frac{24}{11}x$

Также $\triangle BEO \sim \triangle BAD$ и $EO = \frac{3}{11}AD = \frac{24x}{11}$

$EF = \frac{24}{11}x + \frac{24}{11}x = \frac{48}{11}x$

$S_{ABCF} = \frac{BC+EF}{2}\cdot h_1 = \frac{3x+\frac{48}{11}x}{2}\cdot\frac{3}{8}h_2 = \frac{243}{16\cdot 11}xh_2$

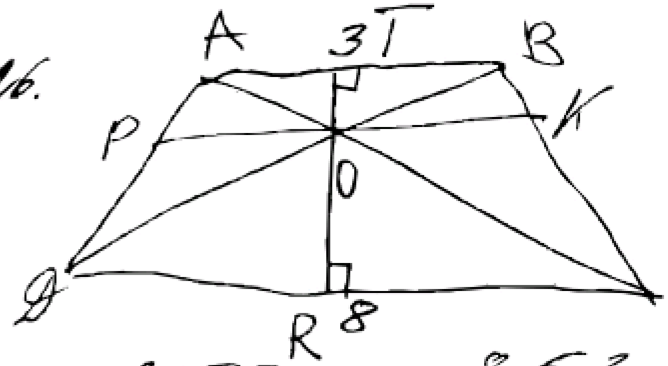
$S_{EF\cancel{AA}} = \frac{EF+AD}{2}\cdot h_2 = \frac{\frac{48}{11}x+8x}{2}\cdot h_2 = \frac{136}{2\cdot 11}h_2$

$\frac{S_{ABCF}}{S_{EFDA}} = \frac{243\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{11}}{\cancel{16}_{8}\cdot\cancel{11}\cdot 136} = \frac{243}{1088}$ Ответ: $\frac{243}{1088}$.

Комментарий. Решение верное, найден правильный ответ, но не везде есть ссылки на теоремы и недостаточно пояснений. Нужно ставить 1 балл.

Пример 2.

№26.



$$PK = \frac{AB+DC}{2} = \frac{3+8}{2} = 5{,}5$$

$$\frac{OT}{OR} = \frac{3}{8}$$ (из подобия AOB и DOC)

$$S_1 = \frac{3+5{,}5}{2}\cdot 3 = \frac{8{,}5\cdot 3}{2}$$

$$S_2 = \frac{8+5{,}5}{2}\cdot 3 = \frac{13{,}5}{2}\cdot 3$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{8{,}5\cdot 3}{13{,}5\cdot 3} = \frac{85}{135} = \frac{17}{27}.$$

Ответ: 17:27.

Комментарий. За выполненную запись решения выставляется 0 баллов, так как сделана ошибка — отрезок PK не равен полусумме оснований, потому что не является средней линией трапеции.

3.2. Прямоугольные треугольники и ортогональность

В этом разделе собраны задачи по геометрии, в которых обязательным элементом решения является какое-либо свойство прямоугольного треугольника.

Перед решением этих задач нужно повторить свойства окружности и свойства прямоугольных треугольников, которые даны в предыдущем пункте, а также свойства трапеции и формулы площади треугольника. Кроме того, для применения теоремы синусов и теоремы косинусов нам понадобится основное тригонометрическое тождество.

1. **Теорема о средней линии трапеции.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности её оснований.

3. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Площадь прямоугольного треугольника

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.

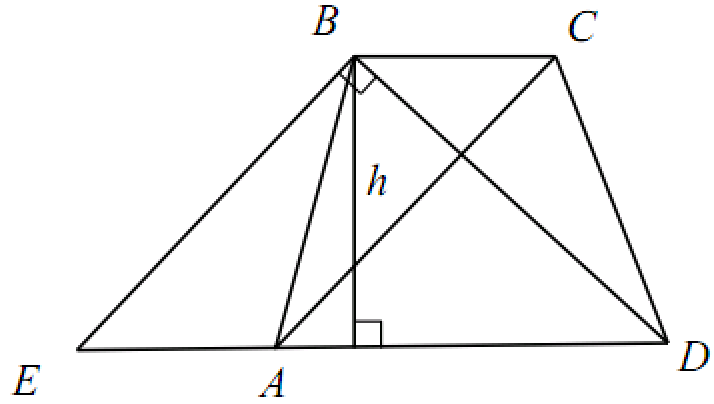
Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения гипотенузы на высоту, проведённую к гипотенузе.

Задача 1.

Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 30 и 16, а средняя линия равна 17.

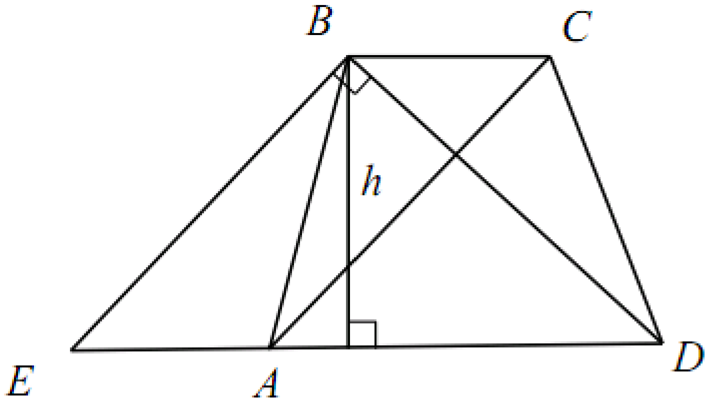
Решение.

Обозначим трапецию $ABCD$ и пусть $AC = 16$, $BD = 30$. Тогда по формуле для длины средней линии $BC + AD = 2 \cdot 17 = 34$. Проведём через точку B прямую BE, параллельную диагонали AC и пересекающую прямую AD в точке E. Обозначим h высоту трапеции $ABCD$.



$BCAE$ является параллелограммом, так как $BC \parallel AE$ и $BE \parallel CA$. Поэтому $BE = AC = 16$, $EA = BC$, $ED = EA + AD = 34$. Треугольник BED — прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора, так как для его сторон $16; 30; 34$ выполняется равенство $BE^2 + BD^2 = DE^2$. Его площадь

$$S_{BED} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot BD = 240.$$



С другой стороны

$$S_{BED} = \frac{1}{2} hDE = \frac{h(BC + AD)}{2} = S_{ABCD},$$

поэтому искомая площадь параллелограмма $ABCD$ равна 240.

Ответ: 240.

3.3. Свойства биссектрис

В этом разделе в каждой задаче используется одно из свойств биссектрисы угла или биссектрисы треугольника. Вспомним эти свойства.

1. Биссектриса делит угол на две равные части.

2. Любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла.

3. Центр вписанной в угол окружности лежит на биссектрисе угла.

4. Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной окружности.

5. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

6. Диагональ ромба является его биссектрисой.

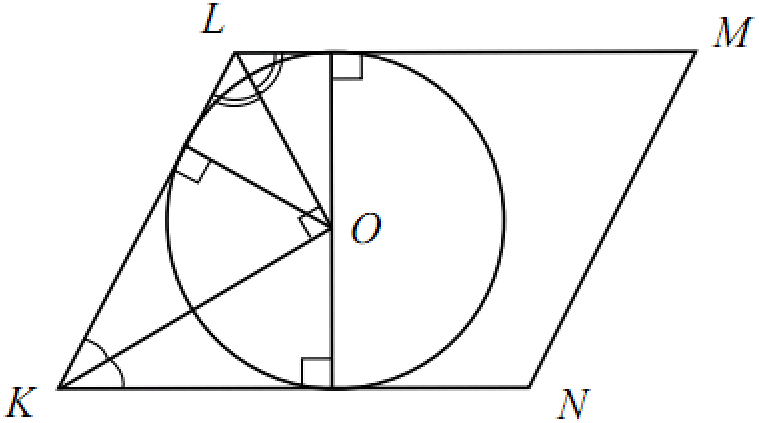
7. Биссектриса вписанного в окружность угла делит пополам дугу, на которую он опирается.

8. Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны. (Это свойство нужно уметь доказывать, если оно необходимо для решения задачи.)

Задача 1.

Биссектрисы углов K и L параллелограмма $KLMN$ пересекаются в точке O. Найдите расстояние от точки O до стороны KL, если $LM = 25$, а площадь параллелограмма равна 240.

Решение.

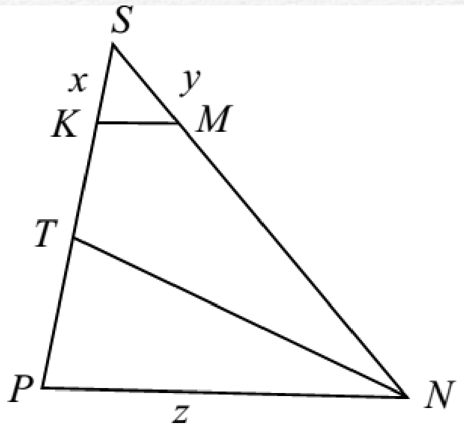


Так как точка O лежит на биссектрисе KO угла LKN, то расстояния от O до прямых KL и KN равны. Аналогично O лежит на биссектрисе LO угла KLM, поэтому расстояния от O до прямых KL и LM равны. Построим окружность с центром O и радиусом r. Она будет касаться прямых KL, LM, KN, так как расстояние от O до этих прямых равно радиусу окружности. $LM \parallel KN$, поэтому расстояние между ними равно $2r$. Тогда по формуле для площади параллелограмма $S = 2r \cdot 25 = 240$.

$r = 4{,}8.$

Ответ: 4,8.

45. Боковые стороны PK и MN трапеции $PKMN$ равны соответственно 12 и 15, а основание KM равно 3. Биссектриса угла PNM проходит через середину стороны PK. Найдите площадь трапеции.



Решение.

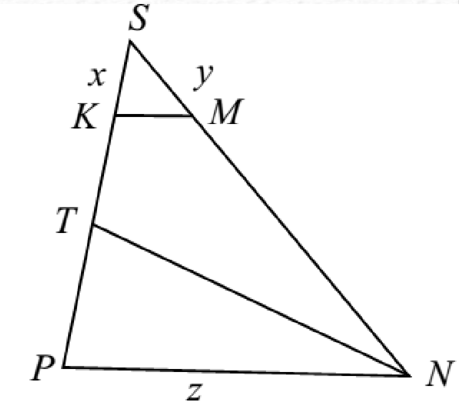
Пусть биссектриса угла PNM пересекает PK в точке T, а прямые PK и MN пересекаются в точке S. Обозначим $x = SK, y = SM, z = PN$.

Тогда по свойству биссектрисы:

$$\frac{PT}{TS} = \frac{PN}{NS},$$

$$\frac{6}{6+x} = \frac{z}{15+y}.$$

Треугольники KMS и PNS подобны, так так $\angle S$ общий, а $\angle MKS = \angle NPS$ как соответственные при параллельных прямых KM и PN. Поэтому:



$$\frac{x}{y} = \frac{12+x}{15+y},$$

$$\frac{3}{x} = \frac{z}{12+x}$$

Из равенства $\dfrac{x}{y} = \dfrac{12+x}{15+y}$ получаем $y = \dfrac{5x}{4}$. Выражая z из остальных уравнений, получаем:

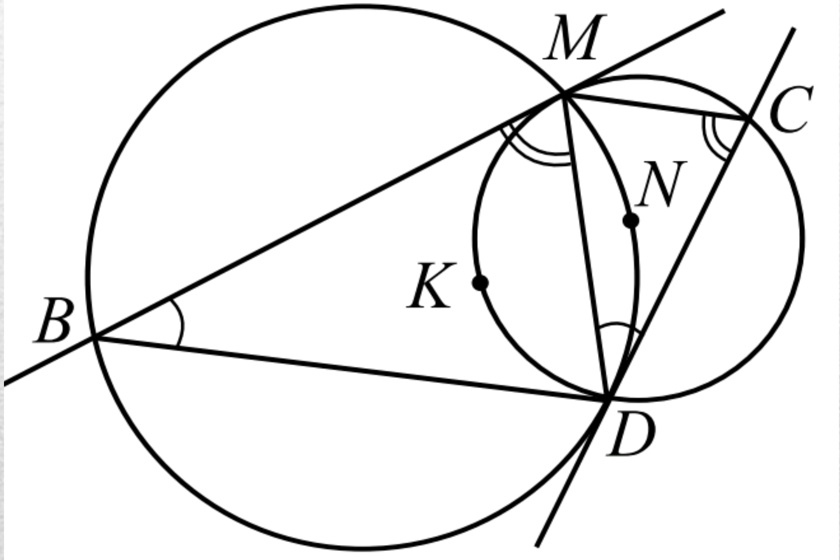
$$z = 3 \cdot \frac{12+x}{x} = 6 \cdot \frac{15+y}{6+x}.$$

Подставив $y = \dfrac{5x}{4}$, получим $z = 3 \cdot \dfrac{12+x}{x} = \dfrac{15}{2} \cdot \dfrac{12+x}{6+x}$. Решая это уравнение, находим $x = 4$, откуда $y = \dfrac{5x}{4} = 5$, $z = 3 \cdot \dfrac{12+x}{x} = 12$.

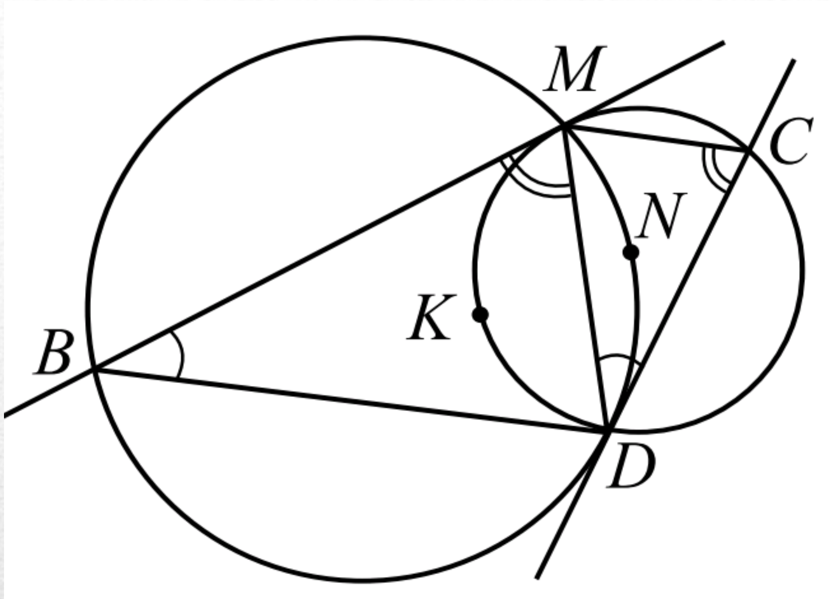
Видим, что треугольник SPN имеет стороны $PN = 12$, $SP = 16$, $SN = 20$, значит, он прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора. Поэтому SP перпендикулярна PN, и PK является высотой трапеции. Значит: $S_{PKMN} = KP \cdot \dfrac{KM+PN}{2} = 12 \cdot \dfrac{3+12}{2} = 90$.

Ответ: 90.

26 Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и D. MB и CD — касательные к первой и второй окружностям, B и C — точки на окружностях. $CD = 10$, MB в 2 раза больше CD. Найдите MC, если периметр $MBDC$ равен 45.



Решение



Угол между касательной MB и хордой MD равен углу MCD, опирающемуся на дугу MKD, то есть $\angle MCD = \angle BMD$. Аналогично $\angle MBD = \angle MDC$.

$\triangle MCD \sim \triangle DMB$, то есть $\frac{MC}{DM} = \frac{CD}{MB}$ и $\frac{MD}{DB} = \frac{CD}{MB}$.

Перемножая полученные равенства, получаем $\frac{MC}{BD} = \frac{DC^2}{MB^2}$. Обозначим $MC = x$, $BD = 45 - (10 + 20 + x) = 15 - x$, тогда

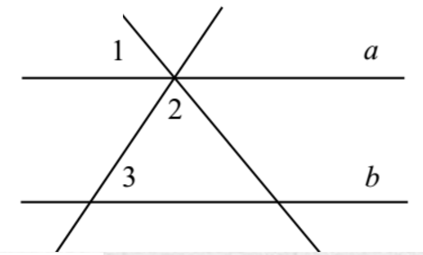
$\frac{x}{15 - x} = \left(\frac{10}{20}\right)^2$; $4x = 15 - x$; $5x = 15$; $x = 3$. Отсюда $MC = 3$.

Ответ: 3.

Диагностика достижений

Вариант 1

1. Прямые a и b параллельны. Найдите $\angle 1$, если $\angle 2 = 31°$, $\angle 3 = 48°$. Ответ дайте в градусах.



2. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника MPK, в котором $MP = PK$ и $\angle MPK = 164°$. Найдите величину угла POK. Ответ дайте в градусах.

3. Прямая, параллельная стороне PK треугольника PKT, пересекает стороны PT и KT в точках R и V соответственно. Найдите RV, если $TR : RP = 2 : 5$, $PK = 49$.

4. Основания DF и GH трапеции $DFGH$ равны соответственно 25 и 9, $DG = 15$. Докажите, что треугольники DFG и DGH подобны.

5. Основание ER равнобедренного треугольника ERT равно 16. Окружность радиуса 10 с центром O вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника ERT и касается основания ER. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ERT.

Тренинг и контроль на заключительном этапе повторения

Базовый, повышенный и высокий уровень

Спасибо за внимание!

Электронные ресурсы

Пособия для подготовки к ОГЭ

http://legionr.ru/books/filter.php

ФИПИ Демоверсии, спецификации, кодификаторы

http://www.fipi.ru/oge-i-gve-9/demoversii-specifikacii-kodifikatory

ФИПИ Для предметных комиссий субъектов РФ

http://www.fipi.ru/oge-i-gve-9/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf

Открытые банки ГИА http://mathgia.ru
http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-oge