ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН
www.legionr.ru
Приказом Минобрнауки РФ №729 от 14.12.2009 пособия издательства «Легион» допускаются к использованию в общеобразовательных учреждениях
Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

Решение неравенств методом рационализации

докладчик: Кулабухов Сергей Юрьевич

История метода рационализации

Метод рационализации неравенств известен около 50 лет, встречался под названиями:

- метод декомпозиции
- метод замены множителей
- обобщение метода интервалов

Теоретическая основа

- Два неравенства A и B называют равносильными, если множества их решений совпадают.
- Если функция $f(x)$ строго возрастает, то знак выражения $f(x_1) - f(x_2)$ совпадает со знаком выражения $x_1 - x_2$.
- Если функция $f(x)$ строго убывает, то знак выражения $f(x_1) - f(x_2)$ совпадает со знаком выражения $x_2 - x_1$.

Идея метода рационализации

- Есть неравенство вида $\dfrac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_m}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n} > 0.$ (здесь u_i, v_k — константы или выражения, зависящие от x)
- Требуется перед применением метода интервалов заменить все выражения на линейные.
- Любой из множителей можно заменять на совпадающий с ним по знаку.

Пример замены множителей

Есть множитель $h^f - h^g$, где $h > 0$.

- При $h > 1$ знак $h^f - h^g$ совпадает со знаком $f - g$.
- При $h < 1$ знак $h^f - h^g$ совпадает со знаком $g - f$.
- Следовательно, при всех значениях h знак $h^f - h^g$ совпадает со знаком $(h-1)(f-g)$.

Таблица замены множителей

Исходный	**Новый**
$h^f - h^g$, где $h > 0$	$(h-1)(f-g)$
$f^h - g^h$, где $f > 0,\ g > 0$	$(f-g)\cdot h$
$\sqrt[n]{f} - \sqrt[n]{g}$, где $f \geqslant 0,\ g \geqslant 0$	$f-g$
$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
$\|a\| - \|b\|$	$(a-b)(a+b)$

Задачи ЕГЭ 2016-2018

$\boxed{\mathbf{15}}$ Решите неравенство $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10)\geqslant 0$.

Решение

Первый способ.

ОДЗ. $\begin{cases} 2x-5>0 \\ 2x-5\neq 1 \\ x^2-6x+10>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\dfrac{5}{2} \\ x\neq 3 \end{cases}$

Метод рационализации: $\boxed{\log_a b \vee 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} (a-1)(b-1)\vee 0}$

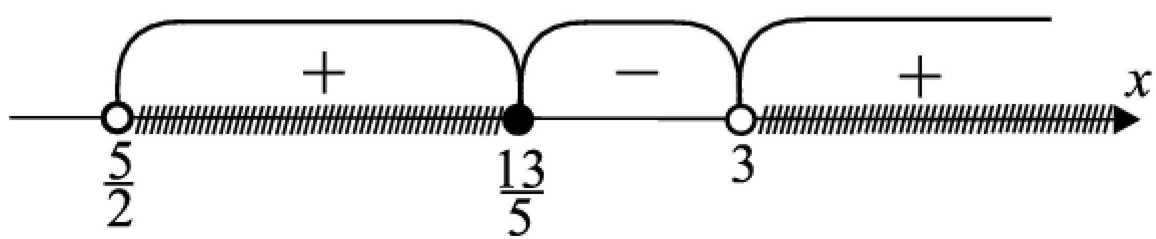
$(5x-13)(2x-5-1)(x^2-6x+10-1)\geqslant 0$

$(5x-13)(2x-6)(x^2-6x+9)\geqslant 0$

$(5x-13)(x-3)(x-3)^2\geqslant 0$

$(5x-13)(x-3)^3\geqslant 0$

Из рисунка следует ответ.



Ответ: $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{13}{5}\right]\cup(3;+\infty)$.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН www.legionr.ru

$\boxed{\mathbf{15}}$ Решите неравенство $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geqslant 0$.

Решение

Второй способ.

Заметим, что $x^2-6x+10=(x-3)^2+1>1$ при любом значении $x \neq 3$.

1) Если $2x-5>1$, то есть $x>3$.

Тогда $\log_{2x-5}(x^2-6x+10)>0$ и исходное неравенство равносильно неравенству $5x-13 \geqslant 0$, которое верно для любого $x>3$.

2) Если $0<2x-5<1$, то есть $\frac{5}{2}<x<3$.

Тогда $\log_{2x-5}(x^2-6x+10)<0$ и исходное неравенство равносильно неравенству $5x-13 \leqslant 0$, $x \leqslant \frac{13}{5}$. В этом случае $\frac{5}{2}<x\leqslant\frac{13}{5}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{5}\right] \cup (3;+\infty)$.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН™
www.legionr.ru

$\boxed{\mathbf{15}}$ Решите неравенство $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geqslant 0.$

Решение

Третий способ.

ОДЗ. $\begin{cases} 2x-5>0 \\ 2x-5\neq 1 \\ x^2-6x+10>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\dfrac{5}{2} \\ x\neq 3 \end{cases}$

Решим уравнение $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10)=0.$

$5x-13=0$ или $\log_{2x-5}(x^2-6x+10)=0;$

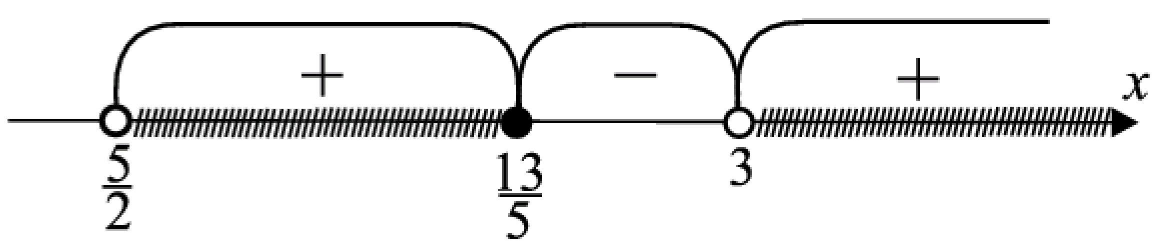
$x=\dfrac{13}{5}$ $\qquad x^2-6x+10=1;$

$x^2-6x+9=0;$

$(x-3)^2=0;$

$x=3$ (не удовлетворяет ОДЗ).

Из рисунка следует ответ.



Ответ: $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{13}{5}\right]\cup(3;+\infty).$

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН www.legionr.ru

$\boxed{\mathbf{15}}$ Решите неравенство $1+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right)$.

Решение

Первый способ.

ОДЗ. $\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{x^2+1}{2x}>0 \\ \dfrac{x^2+1}{2x}\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{x^2+1}{2x}+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right)$$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{(x^2+1)x}{2x}-\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right)\leqslant 0$$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{x^2+1}{2}-\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right)\leqslant 0$$

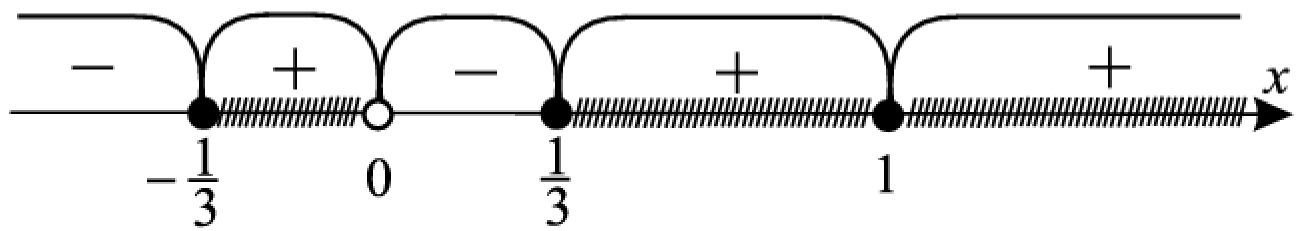
Метод рационализации: $\boxed{\log_a b-\log_a c\vee 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} (a-1)(b-c)\vee 0}$

$$\left(\frac{x^2+1}{2x}-1\right)\left(\frac{x^2+1}{2}-\left(x^2+\frac{4}{9}\right)\right)\leqslant 0$$

$$\left(\frac{x^2+1}{2x}-1\right)\left(\frac{x^2+1}{2}-\left(x^2+\frac{4}{9}\right)\right)\leqslant 0$$

$$\frac{x^2+1-2x}{2x}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{18}\right)\leqslant 0$$

$$\frac{(x-1)^2(9x^2-1)}{x}\geqslant 0$$



Из рисунка следует решение последнего неравенства $x\in\left[-\frac{1}{3};0\right)\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Учитывая ОДЗ исходного неравенства получим $x\in\left[\frac{1}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $\left[\frac{1}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$.

$\boxed{15}$ Решите неравенство $1+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}}\left(x^2+\frac{4}{9}\right)$.

Решение

Второй способ.

ОДЗ. $\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{x^2+1}{2x}>0 \\ \dfrac{x^2+1}{2x}\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{x^2+1}{2x}+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}}\left(x^2+\frac{4}{9}\right)$$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{(x^2+1)x}{2x} \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}}\left(x^2+\frac{4}{9}\right)$$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{x^2+1}{2} \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}}\left(x^2+\frac{4}{9}\right)$$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{x^2+1}{2} \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right)$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $\dfrac{x^2+1}{2x} > 1$; $\dfrac{x^2+1-2x}{2x} > 0$; $\dfrac{(x-1)^2}{2x} > 0$; $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Тогда

$$\frac{x^2+1}{2} \leqslant x^2+\frac{4}{9} \qquad x^2+1-2x^2-\frac{8}{9} \leqslant 0 \qquad -x^2+\frac{1}{9} \leqslant 0 \qquad x^2-\frac{1}{9} \geqslant 0$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Учитывая ограничение случая, получим $x \in \left[\dfrac{1}{3}; 1\right) \cup \left(1; +\infty\right)$.

2) Если $0 < \dfrac{x^2+1}{2x} < 1$. Это неравенство не имеет решений. Значит этот случай невозможен.

Из 1) и 2), учитывая ОДЗ, получим ответ $x \in \left[\dfrac{1}{3}; 1\right) \cup \left(1; +\infty\right)$.

Ответ: $\left[\dfrac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Решите неравенство $1+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right)$.

Решение

Третий способ.

Решим неравенство $1+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x - \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right) \leqslant 0$.

ОДЗ. $\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{x^2+1}{2x}>0 \\ \dfrac{x^2+1}{2x}\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

Решим уравнение $1+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x - \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right) = 0$.

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{x^2+1}{2x} + \log_{\frac{x^2+1}{2x}} x - \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right) = 0$$

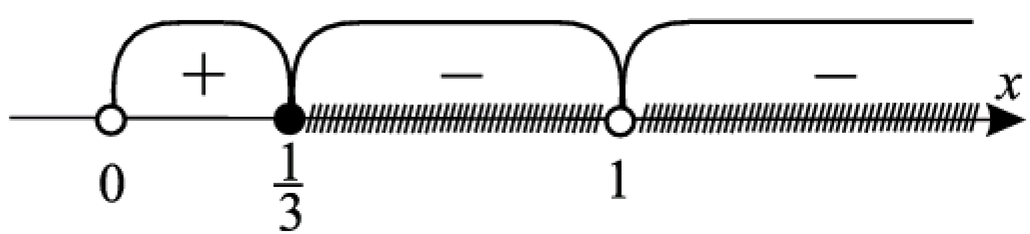
$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{(x^2+1)x}{2x\left(x^2+\frac{4}{9}\right)} = 0$$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{(x^2+1)x}{2x\left(x^2+\frac{4}{9}\right)} = 0$$

$$\frac{x^2+1}{2\left(x^2+\frac{4}{9}\right)} = 1; \quad \frac{x^2+1}{2\left(x^2+\frac{4}{9}\right)} - 1 = 0; \quad \frac{x^2-\frac{1}{9}}{2x^2+\frac{8}{9}} = 0; \quad x^2 - \frac{1}{9} = 0;$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{3}.$$

Учитывая ОДЗ, получим рисунок из которого следует ответ.



Ответ: $\left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty).$

Несколько примеров

Пример 1. $\log_{\sqrt{x}}(2-x)^4 < 8$

ОДЗ: $x > 0,\ x \neq 1,\ x \neq 2.$

$\log_{\sqrt{x}} |2-x| < 2,$

$\log_{\sqrt{x}} |2-x| - \log_{\sqrt{x}} x < 0,$

$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$

$(\sqrt{x}-1)\big(|2-x|-x\big) < 0,$

$\sqrt[n]{f} - \sqrt[n]{g}$, где $f \geqslant 0,\ g \geqslant 0$	$f-g$

$\|a\| - \|b\|$	$(a-b)(a+b)$

$(x-1)(2-x-x)(2-x+x) < 0,$

$(x-1)^2 > 0.$

Ответ: $(0;1) \cup (1;2) \cup (2;+\infty).$

Пример 2. $\log_{|x-2|}(x^2-1) \leqslant 2$

ОДЗ: $|x| > 1,\ x \neq 2,\ x \neq 3.$

$$\log_{|x-2|}(x^2-1) - \log_{|x-2|}(x-2)^2 \leqslant 0,$$

$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$

$$(|x-2|-1)(x^2-1-x^2+4x-4) \leqslant 0,$$

$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert$	$(a-b)(a+b)$

$$(x-3)(x-1)(4x-5) \leqslant 0,$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [1{,}25; 3].$$

Учтём ОДЗ: $x \in (-\infty; -1) \cup [1{,}25; 2) \cup (2; 3).$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup [1{,}25; 2) \cup (2; 3).$

Пример 3. $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1}x > 2$

ОДЗ: $x>0,\ x\neq 1.$

$$\log_{x+1}(x^3+1)-2>0,$$

$$\log_{x+1}(x^3+1)-\log_{x+1}(x+1)^2>0,$$

$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$

$$(x+1-1)(x^3+1-x^2-2x-1)>0,$$

$$x^2(x^2-x-2)>0,$$

$$(x+1)(x-2)>0,$$

$$x>2.$$

Ответ: $(2;+\infty)$.

Пример 4. (начало) $\dfrac{\log_x(x+2) - 4\log_{x+2} x}{x(x+2)} \geqslant 0$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$. $\quad \log_x(x+2) - 4\log_{x+2} x \geqslant 0$

$$\log_x(x+2) - \frac{4}{\log_x(x+2)} \geqslant 0 \quad \frac{\log_x^2(x+2) - 4}{\log_x(x+2)} \geqslant 0,$$

$$\frac{(\log_x(x+2) - \log_x x^2)(\log_x(x+2) - \log_x x^{-2})}{\log_x(x+2)} \geqslant 0,$$

$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$

$$\frac{(x-1)^2(x+2-x^2)(x+2-x^{-2})}{(x-1)(x+2-1)} \geqslant 0,$$

Пример 4. (окончание) $\dfrac{\log_x(x+2) - 4\log_{x+2} x}{x(x+2)} \geqslant 0$

$$\frac{(x-1)^2(x+2-x^2)(x+2-x^{-2})}{(x-1)(x+2-1)} \geqslant 0,$$

$$\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x^3+2x^2-1)}{x^2(x+1)} \leqslant 0,$$

$$(x-1)(x-2)(x+1)(x^2+x-1) \leqslant 0,$$

$$(x-1)(x-2)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \leqslant 0.$$

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup (1; 2]$.

Пример 5 (начало).

$$\left(4 - x^{\log_2 x}\right)\left(\log_2 \frac{3x+3}{16} + \log_{3x+3} 16\right) \geqslant 0$$

ОДЗ: $x > 0$.

$$\left(2^{\log_2^2 x} - 2^2\right)\left(\log_2(3x+3) - 4 + \frac{4}{\log_2(3x+3)}\right) \leqslant 0,$$

$$\text{так как}\quad x^{\log_2 x} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x} = 2^{\log_2^2 x}$$

$h^f - h^g$, где $h > 0$	$(h-1)(f-g)$

$$\left(\log_2^2 x - 2\right) \cdot \frac{\log_2^2(3x+3) - 4\log_2(3x+3) + 4}{\log_2(3x+3)} \leqslant 0,$$

Пример 5 (окончание).

$$\left(4 - x^{\log_2 x}\right)\left(\log_2 \frac{3x+3}{16} + \log_{3x+3} 16\right) \geqslant 0$$

$$(\log_2^2 x - 2) \cdot \frac{\log_2^2(3x+3) - 4\log_2(3x+3) + 4}{\log_2(3x+3)} \leqslant 0,$$

$$(\log_2 x - \sqrt{2})(\log_2 x - (-\sqrt{2}))(\log_2(3x+3) - 2)^2 \leqslant 0,$$

$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$

$$(\log_2 x - \log_2 2^{\sqrt{2}})(\log_2 x - \log_2 2^{(-\sqrt{2})})(3x-1)^2 \leqslant 0,$$

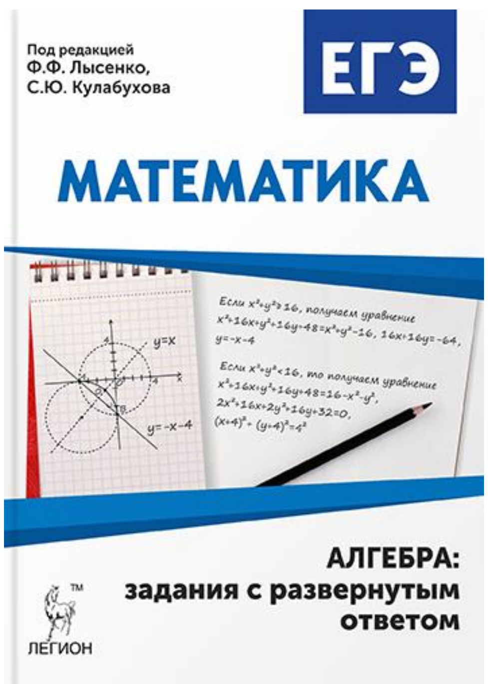
$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$

$$(x - 2^{\sqrt{2}})(x - 2^{(-\sqrt{2})})(3x-1)^2 \leqslant 0,$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left[2^{-\sqrt{2}}; 2^{\sqrt{2}}\right].$

Литература

1. **Дорофеев В. Г.** Обобщение метода интервалов // Математика в школе. 1969. №3.
2. **Голубев В.** Метод замены множителей // Квант, 2006. №4.
3. Математика. ЕГЭ. Алгебра: задания с развёрнутым ответом: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2016. — 360 с.
4. **Прокофьев А. А., Корянов А. Г.** Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание С3. Решение неравенств с одной переменной. — Ростов-на-Дону: Легион, 2014. — 176 с.
5. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2014: решаем задание С3 методом рационализации: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 32 с.



Книги можно заказать в нашем интернет-магазине на сайте **www.legionr.ru**

Спрашивайте
в книжных магазинах города!

Издательство регулярно проводит вебинары для педагогов.

По завершении каждого вебинара участники получают электронные сертификаты.

Ссылки для участия вы сможете найти на сайте издательства www.legionr.ru

Все вебинары издательства «Легион» носят обучающий характер

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН™
www.legionr.ru

Приказом Минобрнауки РФ №729 от 14.12.2009 пособия издательства «Легион» допускаются к использованию в общеобразовательных учреждениях

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

legionrus@legionrus.com

Вступайте в группу

«Издательство «Легион»

в социальных сетях:

ВКонтакте

одноклассники

facebook

Видео вебинаров смотрите на YouTube.

Адрес для корреспонденции:

344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550