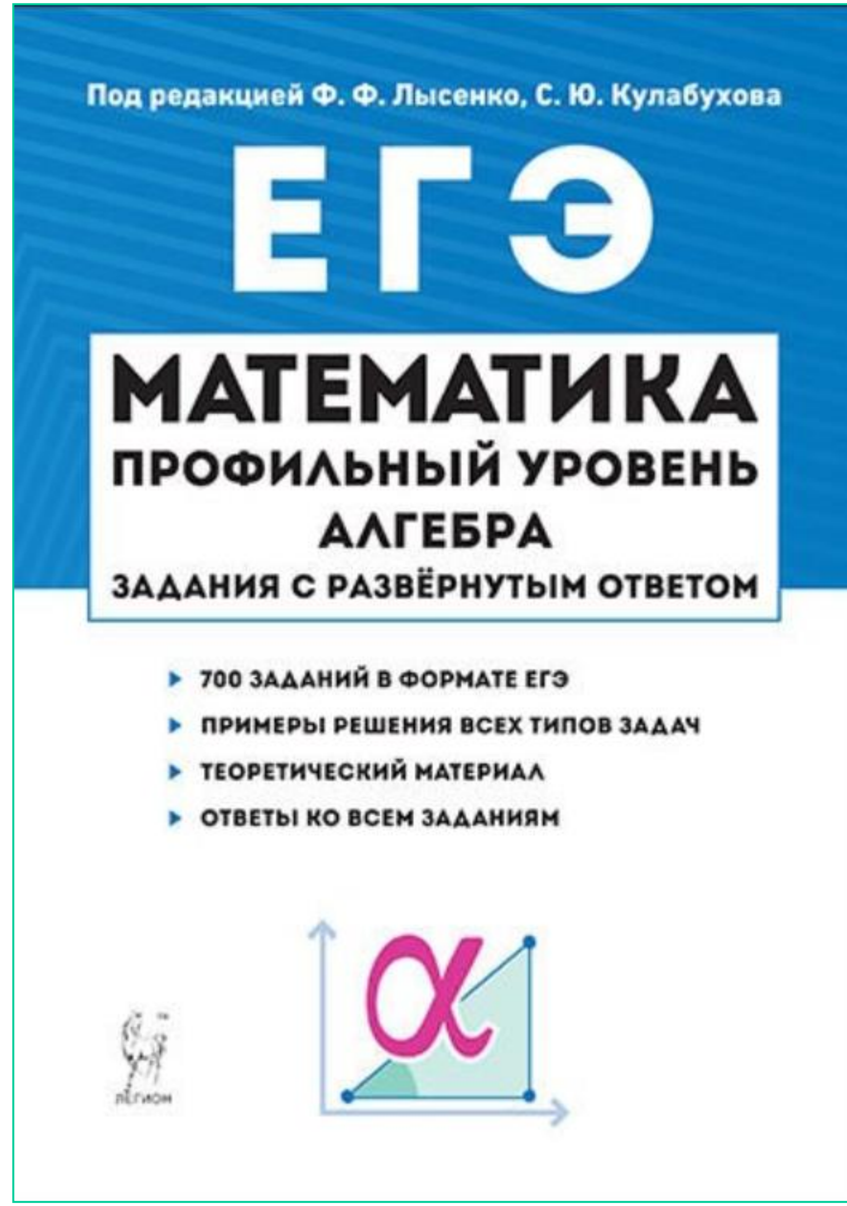
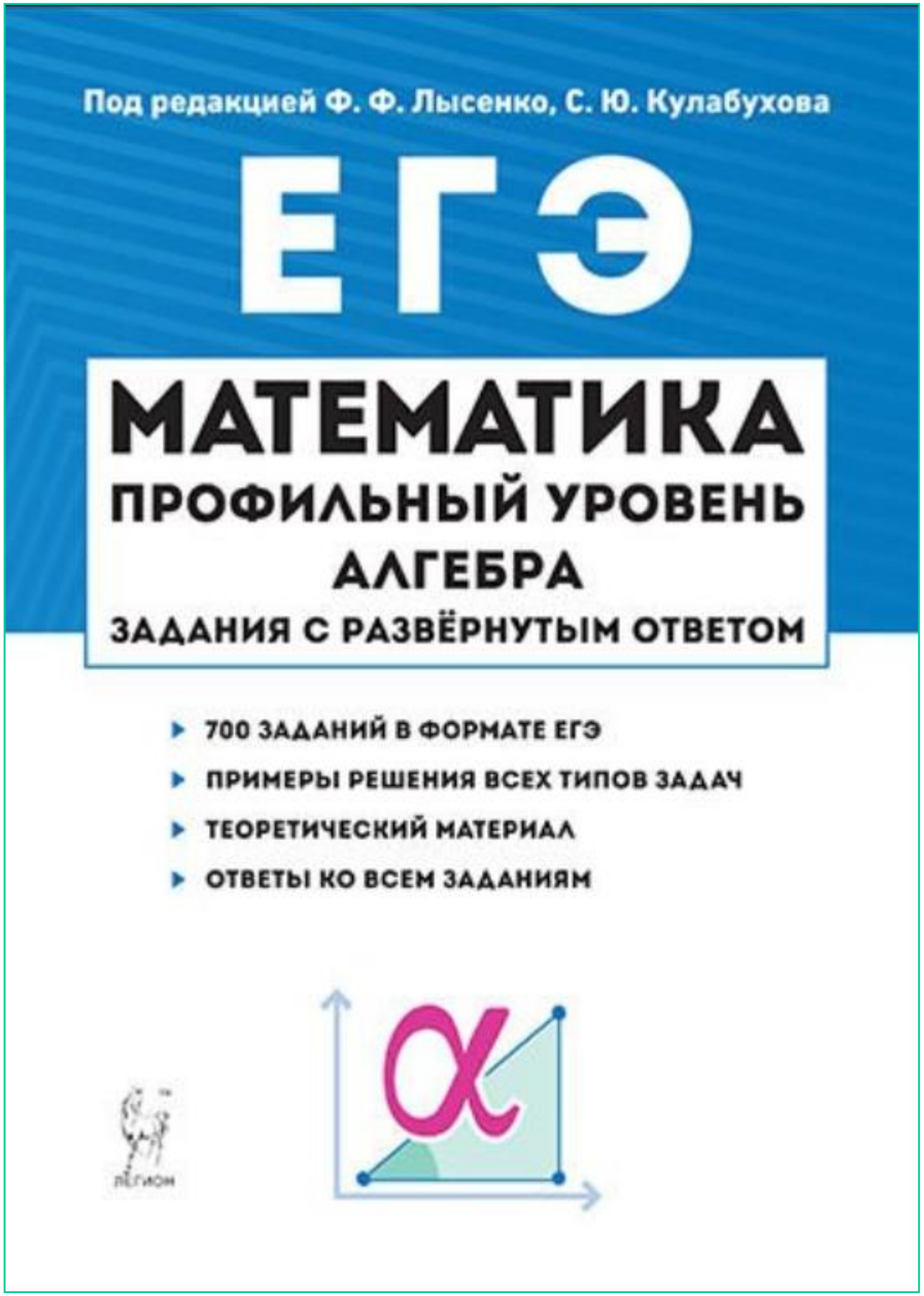
Издательство «Легион»

Нестандартные методы решения уравнений и неравенств



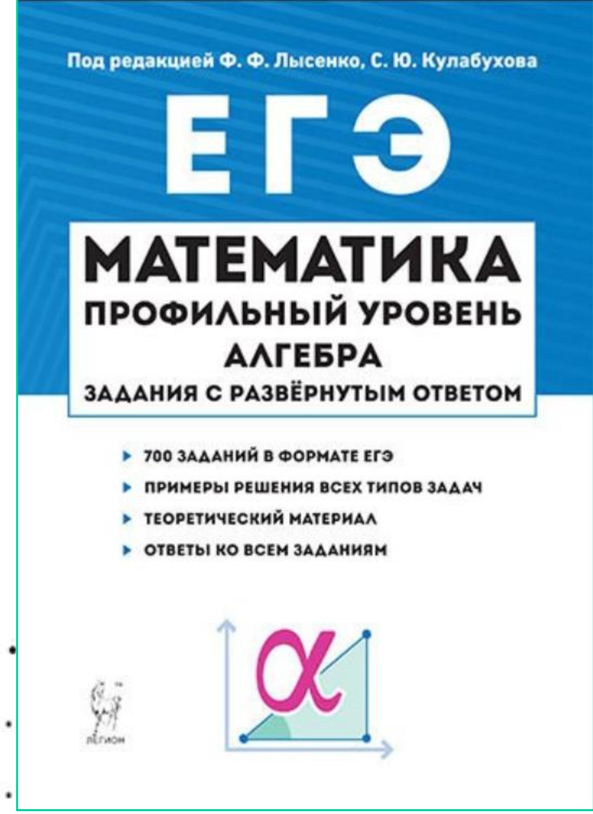
докладчик: Кулабухов Сергей Юрьевич



Подготовка к ЕГЭ

Пособие позволяет подготовиться к заданиям **с развёрнутым ответом по алгебре** по темам:

- Тригонометрические уравнения
- Неравенства
- Экономические задачи
- Задания с параметром
- Олимпиадные задачи



Часть II Методы решения неравенств

Основные нестандартные методы

1. **Метод рационализации**
2. **Оценка**
3. **Учет ОДЗ**
4. **Использование производной**
5. **Использование известных неравенств**

История метода рационализации

Метод рационализации неравенств известен около 50 лет, встречался под названиями:

- метод декомпозиции
- метод замены множителей
- обобщение метода интервалов

Теоретическая основа

- Два неравенства A и B называют равносильными, если множества их решений совпадают.
- Если функция $f(x)$ строго возрастает, то знак выражения $f(x_1) - f(x_2)$ совпадает со знаком выражения $x_1 - x_2$.
- Если функция $f(x)$ строго убывает, то знак выражения $f(x_1) - f(x_2)$ совпадает со знаком выражения $x_2 - x_1$.

Идея метода рационализации

- Есть неравенство вида $\dfrac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_m}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n} > 0.$ (здесь u_i, v_k — константы или выражения, зависящие от x)
- Требуется перед применением метода интервалов заменить все выражения на линейные.
- Любой из множителей можно заменять на совпадающий с ним по знаку.

Пример замены множителей

Есть множитель $h^f - h^g$, где $h > 0$.

- При $h > 1$ знак $h^f - h^g$ совпадает со знаком $f - g$.
- При $h < 1$ знак $h^f - h^g$ совпадает со знаком $g - f$.
- Следовательно, при всех значениях h знак $h^f - h^g$ совпадает со знаком $(h-1)(f-g)$.

Таблица замены множителей

Исходный	**Новый**
$h^f - h^g$, где $h > 0$	$(h-1)(f-g)$
$f^h - g^h$, где $f > 0,\ g > 0$	$(f-g)\cdot h$
$\sqrt[n]{f} - \sqrt[n]{g}$, где $f \geqslant 0,\ g \geqslant 0$	$f-g$
$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
$\|a\| - \|b\|$	$(a-b)(a+b)$

Пример 1. $\log_{\sqrt{x}}(2-x)^4 < 8$

ОДЗ: $x > 0,\ x \neq 1,\ x \neq 2.$

$$\log_{\sqrt{x}}|2-x| < 2,$$

$$\log_{\sqrt{x}}|2-x| - \log_{\sqrt{x}} x < 0,$$

$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$

$$(\sqrt{x}-1)\big(|2-x|-x\big) < 0,$$

$\sqrt[n]{f} - \sqrt[n]{g}$, где $f \geqslant 0,\ g \geqslant 0$	$f-g$

$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert$	$(a-b)(a+b)$

$$(x-1)(2-x-x)(2-x+x) < 0,$$

$$(x-1)^2 > 0.$$

Ответ: $(0;1) \cup (1;2) \cup (2;+\infty)$.

Пример 2. $\log_{|x-2|}(x^2-1) \leqslant 2$

ОДЗ: $|x|>1,\ x\neq 2,\ x\neq 3.$

$$\log_{|x-2|}(x^2-1)-\log_{|x-2|}(x-2)^2\leqslant 0,$$

$\log_h f-\log_h g$	$(h-1)(f-g)$

$$(|x-2|-1)(x^2-1-x^2+4x-4)\leqslant 0,$$

$\|a\|-\|b\|$	$(a-b)(a+b)$

$$(x-3)(x-1)(4x-5)\leqslant 0,$$

$$x\in(-\infty;1]\cup[1{,}25;3].$$

Учтём ОДЗ: $x\in(-\infty;-1)\cup[1{,}25;2)\cup(2;3).$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup[1{,}25;2)\cup(2;3).$

Пример 3 (начало).

$$\left(4 - x^{\log_2 x}\right)\left(\log_2 \frac{3x+3}{16} + \log_{3x+3} 16\right) \geqslant 0$$

ОДЗ: $x > 0$.

$$\left(2^{\log_2^2 x} - 2^2\right)\left(\log_2(3x+3) - 4 + \frac{4}{\log_2(3x+3)}\right) \leqslant 0,$$

так как $x^{\log_2 x} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x} = 2^{\log_2^2 x}$

$h^f - h^g$, где $h > 0$	$(h-1)(f-g)$

$$\left(\log_2^2 x - 2\right) \cdot \frac{\log_2^2(3x+3) - 4\log_2(3x+3) + 4}{\log_2(3x+3)} \leqslant 0,$$

Пример 3 (окончание).

$$\left(4 - x^{\log_2 x}\right)\left(\log_2 \frac{3x+3}{16} + \log_{3x+3} 16\right) \geqslant 0$$

$$\left(\log_2^2 x - 2\right) \cdot \frac{\log_2^2(3x+3) - 4\log_2(3x+3) + 4}{\log_2(3x+3)} \leqslant 0,$$

$$(\log_2 x - \sqrt{2})(\log_2 x - (-\sqrt{2}))(\log_2(3x+3) - 2)^2 \leqslant 0,$$

$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$

$$(\log_2 x - \log_2 2^{\sqrt{2}})(\log_2 x - \log_2 2^{(-\sqrt{2})})(3x-1)^2 \leqslant 0,$$

$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$

$$(x - 2^{\sqrt{2}})(x - 2^{(-\sqrt{2})})(3x-1)^2 \leqslant 0,$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left[2^{-\sqrt{2}}; 2^{\sqrt{2}}\right].$

Теоретические основы метода оценки

1) Если $f \leqslant A$ и $g \leqslant B$, то $f+g \leqslant A+B$.

2) Если $f \leqslant A$ и $A \leqslant g$, то $f \leqslant g$.

При этом $f = g \Longleftrightarrow \begin{cases} f = A \\ g = A. \end{cases}$

Метод оценки

1. Решите неравенство

$$\log_5^2(3x-3)+\sqrt{3x-4}+|8x-6x^2|\leqslant 0.$$

$$\log_5^2(3x-3)+\sqrt{3x-4}+|8x-6x^2|\leqslant 0.$$

Решение.

$$\log_5^2(3x-3)\ \geqslant\ 0;\quad \sqrt{3x-4}\ \geqslant\ 0;$$

$$|8x-6x^2|\ \geqslant\ 0$$

Левая часть неравенства неотрицательна. Исходное неравенство выполняется, если каждое слагаемое равно нулю при одном и том же значении *x*.

$$\begin{cases} \log_5^2(3x-3)=0, \\ \sqrt{3x-4}=0, \\ |8x-6x^2|=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-3=1, \\ x=\dfrac{4}{3}, \\ x=0; x=\dfrac{4}{3}; \end{cases} \qquad x=\frac{4}{3}.$$

Ответ: $x=\dfrac{4}{3}$.

При каких значениях параметра a уравнение

$$2^{x^4-18x^2+84} = 8 - x^2 - 2xa(a-2) - a^4 + 4a^3 - 4a^2$$

имеет хотя бы один корень?

Решение.

$$2^{(x^4-18x^2+81)+3} = 8 - (x^2 + 2x(a^2-2a) + (a^4 - 4a^3 + 4a^2)),$$

$$2^{(x^2-9)^2+3} = 8 - (x^2 + 2x(a^2-2a) + (a^2-2a)^2),$$

$$2^{(x^2-9)^2+3} = 8 - (x + a^2 - 2a)^2,$$

$(x^2-9)^2 \geqslant 0,\ (x^2-9)^2 + 3 \geqslant 3;\ 2^{(x^2-9)^2+3} \geqslant 8.$

$-(x+a^2-2a)^2 \leqslant 0;\ 8 - (x+a^2-2a)^2 \leqslant 8.$

$$\begin{cases} 2^{(x^2-9)^2+3} = 8, \\ 8 - (x+a^2-2a)^2 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ x + a^2 - 2a = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3;\ x_2 = -3, \\ x + a^2 - 2a = 0. \end{cases}$$

$x = 3$, $3 + a^2 - 2a = 0$, корней нет.

$x = -3$, $-3 + a^2 - 2a = 0$; $a_1 = -1$; $a_2 = 3$.

Ответ: $a = -1$; $a = 3$.

Учёт ОДЗ

1. Решите неравенство
$\sqrt{8x^2-3x-5} \geqslant \log_2(-x+1) - \sqrt{8x+5}$.

Решение.
Найдём ОДЗ.

$$\begin{cases} 8x^2-3x-5 \geqslant 0, \\ 1-x>0, \\ 8x+5 \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant -\dfrac{5}{8};\ x \geqslant 1, \\ x < 1; \\ x \geqslant -\dfrac{5}{8}; \end{cases} \qquad x = -\frac{5}{8}.$$

Проверим, является ли оно решением неравенства.

$$\sqrt{0} \geqslant \log_2\left(1\frac{5}{8}\right) - \sqrt{0}; \qquad \log_2\left(1\frac{5}{8}\right) \leqslant 0.$$

Неравенство неверно, $x = -\dfrac{5}{8}$ не является решением.

Ответ: $\varnothing$.

Решите неравенство

$$\sqrt{6-x^2} \geqslant \log_6(x-1) - \log_6(\sqrt{6}-1).$$

Решение.

Найдём ОДЗ.

$$\begin{cases} 6-x^2 \geqslant 0, \\ x-1>0; \end{cases} \quad 1 < x \leqslant \sqrt{6}.$$

Преобразуем неравенство $\sqrt{6-x^2} \geqslant \log_6 \dfrac{x-1}{\sqrt{6}-1}$.

Заметим, что при $1 < x \leqslant \sqrt{6}$ выполняется $x-1 \leqslant \sqrt{6}-1$

$$\log_6 \frac{x-1}{\sqrt{6}-1} \leqslant 0.$$

$$\sqrt{6-x^2} \geqslant \log_6 \frac{x-1}{\sqrt{6}-1}.$$

Если $\log_6 \dfrac{x-1}{\sqrt{6}-1} \leqslant 0$; то исходное неравенство верно при всех допустимых значениях переменной.

Решением неравенства будут $x \in (1;\ \sqrt{6}]$.

Ответ: $x \in (1;\ \sqrt{6}]$.

Использование производной.

Решите неравенство

$$3x^3 + 3^{3-x^2} \leqslant 18x^2 + 27 + \log_{-x} 1.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} -x > 0, \\ -x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$

При $\begin{cases} x < 0, \\ x \neq -1 \end{cases}$ $\log_{-x} 1 = 0.$

$$x^3 + 3^{2-x^2} \leqslant 6x^2 + 9;$$

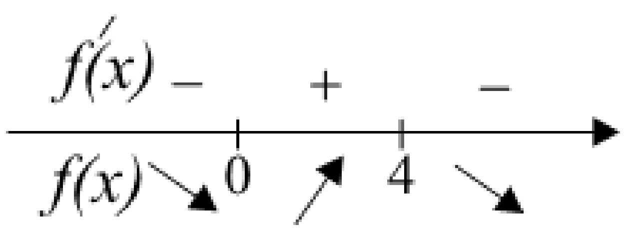
$$3^{2-x^2} \leqslant -x^3 + 6x^2 + 9$$

Пусть $g = 3^{2-x^2}$; $g(x) > 0$; $g(x) \leqslant 3^2$;

$0 < g(x) < 9, \quad g(0) = 9.$

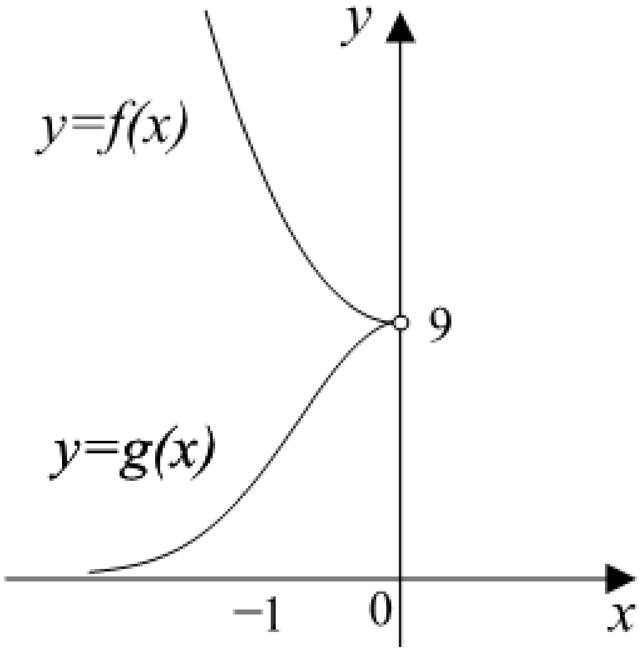
Пусть $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 9$; $f'(x) = -3x^2 + 12x$;

$f'(x) = 0$ при $-3x^2 + 12x = 0$; $\quad x = 0$; $x = 4$.



$f(0) = 9.$

Построим эскиз графиков при $x < 0$



При допустимых значениях $x < 0$

$$g(x) < f(x)$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1; 0)$.

Решите неравенство $\log_2(x+1)+\log_3 x \leqslant 3$.

Первый способ.

$\log_2(x+1)+\log_3 x-3 \leqslant 0$

$\log_2(x+1)+\log_3 x-3=0.$

Заметим, что $x=3$ — корень этого уравнения.

Докажем, что этот корень единственный.

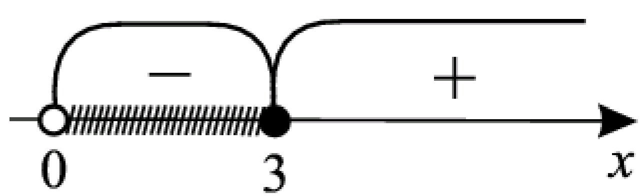
Рассмотрим функцию $y(x)=\log_2(x+1)+\log_3 x-3$, определённую при $x>0$.

$$y'(x)=\frac{1}{(x+1)\ln 2}+\frac{1}{x\ln 3}.$$

Так как $y'(x)>0$ при $x>0$, то функция $y(x)$ возрастает на всей области определения. Следовательно, уравнение $y(x)=0$ имеет не более одного корня.

Таким образом, $x=3$ единственный корень уравнения

$\log_2(x+1)+\log_3 x-3=0.$



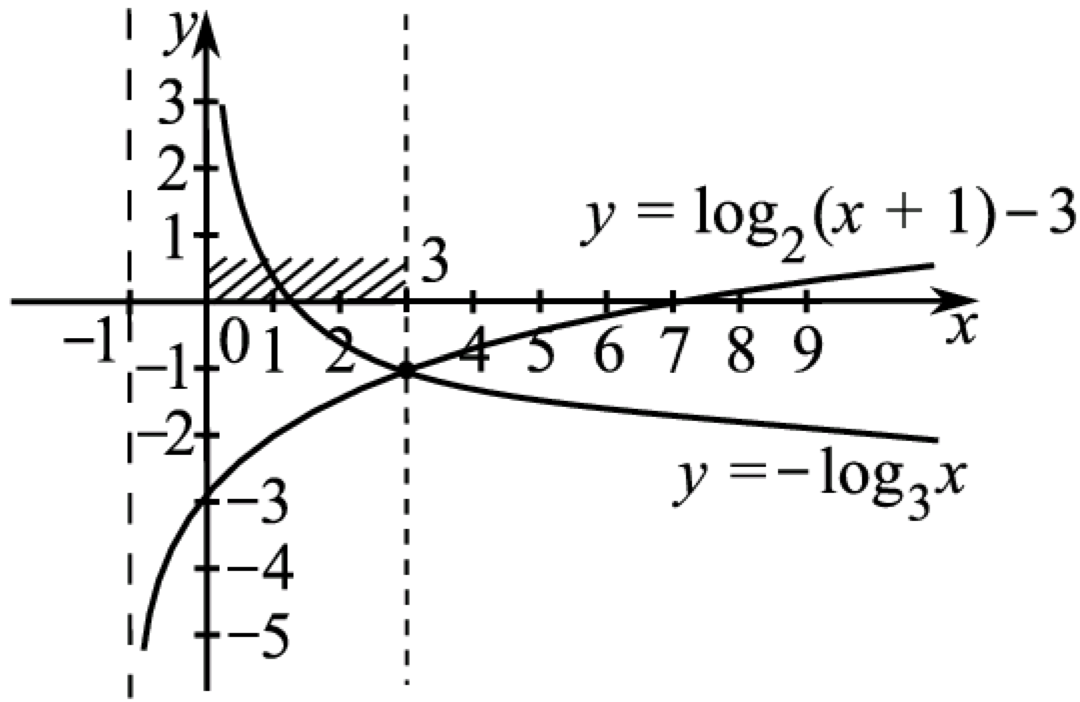
Ответ: $(0;3]$.

Решите неравенство $\log_2(x+1) + \log_3 x \leqslant 3$.

Второй способ.

Запишем неравенство в виде $\log_2(x+1) - 3 \leqslant -\log_3 x$.

Построим графики двух функций $y = \log_2(x+1) - 3$ и $y = -\log_3 x$.



Эти графики пересекаются только в одной точке, абсцисса которой равна 3, поэтому с учётом области определения функций, решением данного неравенства является числовой промежуток $(0; 3]$.

Ответ: $(0; 3]$.

Использование известных неравенств

Неравенства с модулем

$|a| + |b| \geqslant |a + b|,$

$|a| - |b| \leqslant |a - b|.$

Равенство $|a| + |b| = |a + b|$ выполняется только в том случае, если a и b одного знака, то есть $ab \geqslant 0$.

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, причем равенство выполняется только в том случае, если $a = b$.

Неравенство о сумме взаимно обратных чисел.

Если $a > 0$, $b > 0$, то $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$ и $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$.

Если $a < 0$, то $a + \dfrac{1}{a} \leqslant -2$.

$\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \geqslant 2$. Равенство возможно, если $|a| = 1$.

Решите неравенство

$$\log_{5x^2+26}(x^2-8x+26)+\log_{x^2-8x+26}(5x^2+26)\leqslant\log_2(4-x^2).$$

Решение.

Заметим, что

$$\log_{x^2-8x+26}(5x^2+26)=\frac{1}{\log_{5x^2+26}(x^2-8x+26)}$$

Воспользуемся неравенством о сумме взаимно обратных чисел.

$$\log_{(x-4)^2+10}(5x^2+26)>0.$$

$$\log_{5x^2+26}(x^2-8x+26)+\frac{1}{\log_{5x^2+26}(x^2-8x+26)}\geqslant 2.$$

Оценим правую часть исходного неравенства.

$4 - x^2 \leqslant 4$, значит $\log_2(4 - x^2) \leqslant 2$.

$$\begin{cases} \log_{5x^2+26}(x^2 - 8x + 26) + \dfrac{1}{\log_{5x^2+26}(x^2 - 8x + 26)} = 2, \\ \log_2(4 - x^2) = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 + 26 = x^2 - 8x + 26, \\ x = 0; \end{cases}$$

$x = 0$.

Ответ: 0.

Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x.$

Первый способ.

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}.$$

Оценим множество значений левой и правой частей уравнений.

Левая часть: $-2\leqslant 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 2.$

Правая часть: $\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}\geqslant 2$, при $\operatorname{tg}x>0$;

$$\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}\leqslant -2, \text{ при } \operatorname{tg}x<0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\\ \operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}=2\\ \operatorname{tg}x>0\end{cases}\\ \begin{cases}2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2\\ \operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}=-2\\ \operatorname{tg}x<0\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \operatorname{tg}x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\\ \operatorname{tg}x=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\\ \operatorname{tg} x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\\ \operatorname{tg} x=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

1) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

$$\underline{x=\frac{\pi}{4}+2\pi n.}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)=1.$$

2) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

$$x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

$$x=-\frac{3}{4}\pi+2\pi n.$$

Так как $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{3}{4}\pi+2\pi n\right)\neq -1$,

то вторая система не имеет решений.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$

Второй способ.

$$2(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\sin x \cos x}.$$

Замена $t = \sin x + \cos x.$

$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x;\ \ \sin x \cos x = \dfrac{t^2-1}{2}.$

$$\sqrt{2}\cdot t = \frac{2}{t^2-1}$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot t(t^2-1)-2}{t^2-1} = 0$$

$$\sqrt{2}\cdot t^3 - \sqrt{2}\cdot t - 2 = 0, \quad t \neq \pm 1.$$

$$\sqrt{2}\cdot t^3-\sqrt{2}\cdot t-2=0$$

Заметим, что $t=\sqrt{2}$ — корень уравнения.

$$
\begin{array}{l|l}
\quad \sqrt{2}\cdot t^3-\sqrt{2}\cdot t-2 & t-\sqrt{2} \\ \cline{2-2}
-\;\underline{\sqrt{2}\cdot t^3-2t^2} & \sqrt{2}\cdot t^2+2t+\sqrt{2} \\
\qquad\quad 2t^2-\sqrt{2}\cdot t & \\
\qquad -\;\underline{2t^2-2\sqrt{2}\cdot t} & \\
\qquad\qquad\quad \sqrt{2}\cdot t-2 & \\
\qquad\qquad -\;\underline{\sqrt{2}\cdot t-2} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Значит уравнение можно записать в виде
$(t-\sqrt{2})(\sqrt{2}\cdot t^2+2t+\sqrt{2})=0.$

Так как $\sqrt{2}\cdot t^2+2t+\sqrt{2}>0$, то $t=\sqrt{2}$ — единственный корень.

Итак, $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$$

$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x = 1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Решите уравнение $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x.$

Третий способ.

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x\cos x=1$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2x=1$$

Так как $\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 1$ и $|\sin 2x|\leqslant 1$, то возможны два случая.

Первый случай:

$$\begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\\ \sin 2x=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k\end{cases}$$

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \begin{cases} x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi + 2\pi n, n \in Z \\ 2x = \dfrac{3}{2}\pi + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{5}{4}\pi + 2\pi n \\ x = \dfrac{3}{4}\pi + \pi k \end{cases}$$

нет решений

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Задачи ЕГЭ 2016-2018

$\boxed{\mathbf{15}}$ Решите неравенство $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10)\geqslant 0.$

Решение

Первый способ.

ОДЗ. $\begin{cases} 2x-5>0 \\ 2x-5\neq 1 \\ x^2-6x+10>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\dfrac{5}{2} \\ x\neq 3 \end{cases}$

Метод рационализации: $\boxed{\log_a b\vee 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} (a-1)(b-1)\vee 0}$

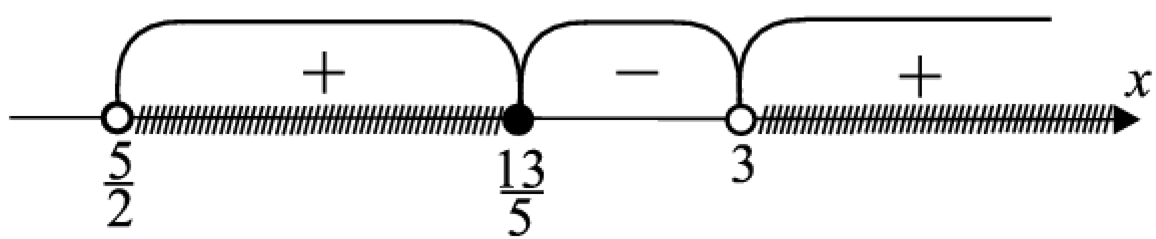
$(5x-13)(2x-5-1)(x^2-6x+10-1)\geqslant 0$

$(5x-13)(2x-6)(x^2-6x+9)\geqslant 0$

$(5x-13)(x-3)(x-3)^2\geqslant 0$

$(5x-13)(x-3)^3\geqslant 0$

Из рисунка следует ответ.



Ответ: $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{13}{5}\right]\cup(3;+\infty).$

$\boxed{\mathbf{15}}$ Решите неравенство $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geqslant 0$.

Решение

Второй способ.

Заметим, что $x^2-6x+10=(x-3)^2+1>1$ при любом значении $x\neq 3$.

1) Если $2x-5>1$, то есть $x>3$.

Тогда $\log_{2x-5}(x^2-6x+10)>0$ и исходное неравенство равносильно неравенству $5x-13\geqslant 0$, которое верно для любого $x>3$.

2) Если $0<2x-5<1$, то есть $\frac{5}{2}<x<3$.

Тогда $\log_{2x-5}(x^2-6x+10)<0$ и исходное неравенство равносильно неравенству $5x-13\leqslant 0$, $x\leqslant\frac{13}{5}$. В этом случае $\frac{5}{2}<x\leqslant\frac{13}{5}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{2};\frac{13}{5}\right]\cup(3;+\infty)$.

$\boxed{\textbf{15}}$ Решите неравенство $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geqslant 0.$

Решение

Третий способ.

ОДЗ. $\begin{cases} 2x-5>0 \\ 2x-5\neq 1 \\ x^2-6x+10>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\dfrac{5}{2} \\ x\neq 3 \end{cases}$

Решим уравнение $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10)=0.$

$5x-13=0$ или $\log_{2x-5}(x^2-6x+10)=0;$

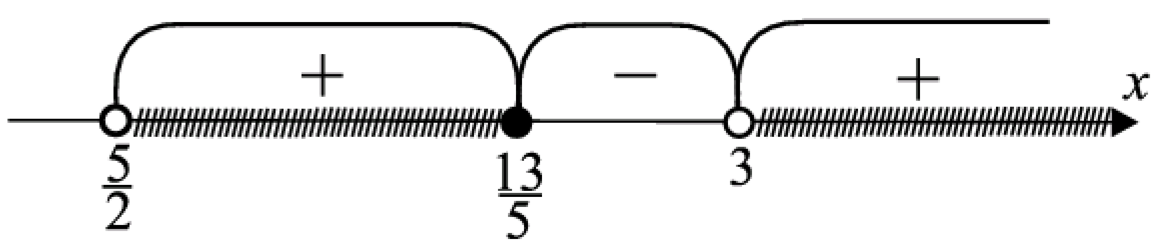
$x=\dfrac{13}{5}$ $\quad x^2-6x+10=1;$

$x^2-6x+9=0;$

$(x-3)^2=0;$

$x=3$ (не удовлетворяет ОДЗ).

Из рисунка следует ответ.



Ответ: $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{13}{5}\right]\cup(3;+\infty).$

$\boxed{\mathbf{15}}$ Решите неравенство $1+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right)$.

Решение

Первый способ.

ОДЗ. $\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{x^2+1}{2x}>0 \\ \dfrac{x^2+1}{2x}\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{x^2+1}{2x} + \log_{\frac{x^2+1}{2x}} x \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right)$$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{(x^2+1)x}{2x} - \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right) \leqslant 0$$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{x^2+1}{2} - \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right) \leqslant 0$$

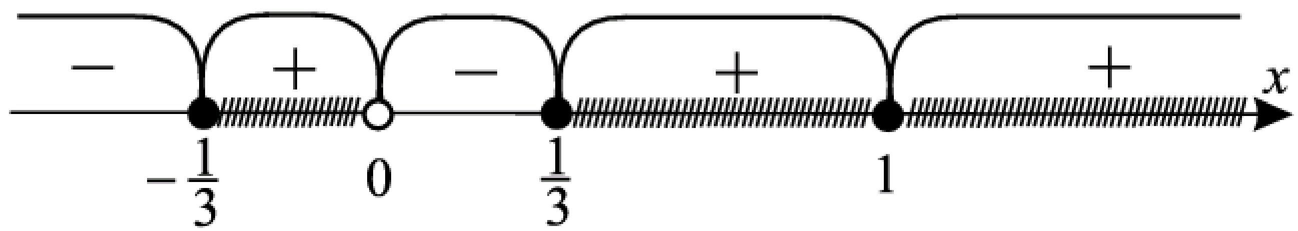
Метод рационализации: $\boxed{\log_a b - \log_a c \vee 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} (a-1)(b-c)\vee 0}$

$$\left(\frac{x^2+1}{2x}-1\right)\left(\frac{x^2+1}{2}-\left(x^2+\frac{4}{9}\right)\right) \leqslant 0$$

$$\left(\frac{x^2+1}{2x}-1\right)\left(\frac{x^2+1}{2}-\left(x^2+\frac{4}{9}\right)\right)\leqslant 0$$

$$\frac{x^2+1-2x}{2x}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{18}\right)\leqslant 0$$

$$\frac{(x-1)^2(9x^2-1)}{x}\geqslant 0$$



Из рисунка следует решение последнего неравенства $x\in\left[-\frac{1}{3};0\right)\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Учитывая ОДЗ исходного неравенства получим $x\in\left[\frac{1}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $\left[\frac{1}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Решите неравенство $1+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}}\left(x^2+\frac{4}{9}\right)$.

Решение

Второй способ.

ОДЗ. $\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{x^2+1}{2x}>0 \\ \dfrac{x^2+1}{2x}\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}}\frac{x^2+1}{2x}+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}}\left(x^2+\frac{4}{9}\right)$$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}}\frac{(x^2+1)x}{2x} \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}}\left(x^2+\frac{4}{9}\right)$$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}}\frac{x^2+1}{2} \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}}\left(x^2+\frac{4}{9}\right)$$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{x^2+1}{2} \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right)$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $\frac{x^2+1}{2x} > 1$; $\frac{x^2+1-2x}{2x} > 0$; $\frac{(x-1)^2}{2x} > 0$; $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Тогда

$$\frac{x^2+1}{2} \leqslant x^2+\frac{4}{9} \qquad x^2+1-2x^2-\frac{8}{9} \leqslant 0 \qquad -x^2+\frac{1}{9} \leqslant 0 \qquad x^2-\frac{1}{9} \geqslant 0$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Учитывая ограничение случая, получим $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty\Big)$.

2) Если $0 < \frac{x^2+1}{2x} < 1$. Это неравенство не имеет решений. Значит этот случай невозможен.

Из 1) и 2), учитывая ОДЗ, получим ответ $x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty\Big)$.

Ответ: $\left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Решите неравенство $1+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x \leqslant \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right)$.

Решение

Третий способ.

Решим неравенство $1+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x - \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right) \leqslant 0$.

ОДЗ. $\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{x^2+1}{2x}>0 \\ \dfrac{x^2+1}{2x}\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

Решим уравнение $1+\log_{\frac{x^2+1}{2x}} x - \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right) = 0$.

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{x^2+1}{2x} + \log_{\frac{x^2+1}{2x}} x - \log_{\frac{x^2+1}{2x}} \left(x^2+\frac{4}{9}\right) = 0$$

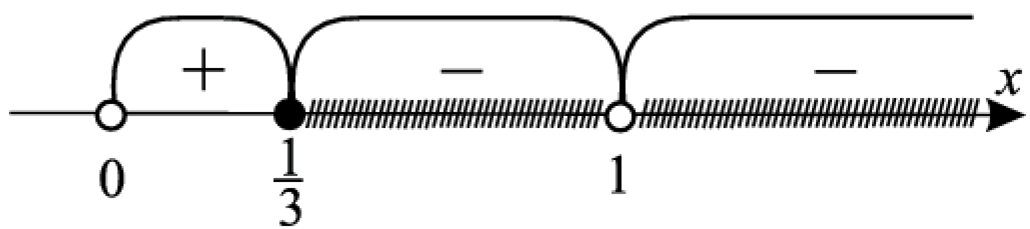
$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{(x^2+1)x}{2x\left(x^2+\frac{4}{9}\right)} = 0$$

$$\log_{\frac{x^2+1}{2x}} \frac{(x^2+1)x}{2x\left(x^2+\frac{4}{9}\right)} = 0$$

$$\frac{x^2+1}{2\left(x^2+\frac{4}{9}\right)} = 1; \quad \frac{x^2+1}{2\left(x^2+\frac{4}{9}\right)} - 1 = 0; \quad \frac{x^2-\frac{1}{9}}{2x^2+\frac{8}{9}} = 0; \quad x^2 - \frac{1}{9} = 0;$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{3}.$$

Учитывая ОДЗ, получим рисунок из которого следует ответ.



Ответ: $\left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty).$

15 Решите неравенство $\log_5(3x^2-2)-\log_5 x<\log_5\left(3x^2+\frac{1}{x}-3\right)$.

Решение

ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2-2>0 \\ x>0 \\ 3x^2+\frac{1}{x}-3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2>\frac{2}{3} \\ x>0 \\ 3x^2+\frac{1}{x}-3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 3x^2+\frac{1}{x}-3>0 \end{cases}$

$\log_5\frac{3x^2-2}{x}<\log_5\left(3x^2+\frac{1}{x}-3\right)$

$\frac{3x^2-2}{x}<3x^2+\frac{1}{x}-3$ $(*)$

$3x^2-2<3x^3-3x+1$ (так как $x>\sqrt{\frac{2}{3}}>0$)

$x^3-x^2-x+1>0$

$x^2(x-1)-(x-1)>0$

$(x-1)(x^2-1)>0$

$(x-1)^2(x+1)>0$

$(x-1)^2>0$ (так как $x>\sqrt{\frac{2}{3}}>0$)

Таким образом, $x\in\left(\sqrt{\frac{2}{3}};1\right)\cup(1;+\infty)$.

Осталось учесть неравенство $3x^2+\frac{1}{x}-3>0$ из ОДЗ.

Докажем, что неравенство $3x^2+\dfrac{1}{x}-3>0$ выполняется для любого $x>\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Первый способ.

$$3x^2+\frac{1}{x}-3>0$$

$$\frac{3x^3-3x+1}{x}>0.$$

Рассмотрим функцию $y(x)=3x^3-3x+1$.

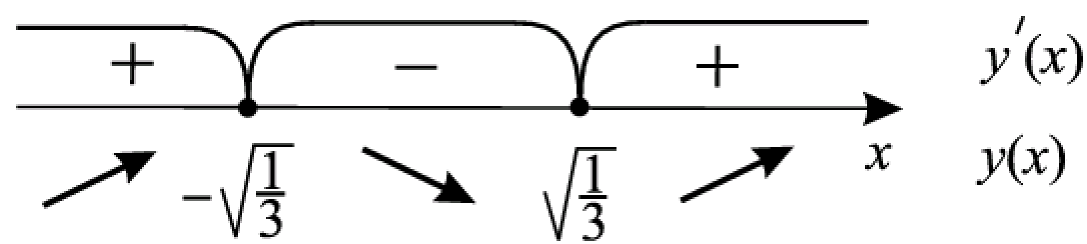
$y'(x)=9x^2-3.$

$9x^2-3=0$

$3x^2-1=0$

$x^2=\dfrac{1}{3}$

$x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$



Так как $y(x)$ возрастает при $x>\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ и

$$y\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=3\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3-3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+1=3\cdot\sqrt{\frac{8}{27}}-\sqrt{6}+1=\sqrt{\frac{8}{3}}+1-\sqrt{6}=\frac{2}{3}\sqrt{6}-\sqrt{6}+1=1-\frac{\sqrt{6}}{3}>0,$$

то $y(x)>0$ при $x>\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Таким образом, неравенство $\dfrac{3x^3-3x+1}{x}>0$ выполняется для любого $x>\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Докажем, что неравенство $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$ выполняется для любого $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Второй способ.

1) При $\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 1$ выполняются неравенства $3x^2 - 2 > 0$ и $\frac{1}{x} - 1 > 0$.

Значит, $3x^2 - 2 + \frac{1}{x} - 1 > 0$, то есть $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$.

2) При $x \geqslant 1$ выполняются неравенства $3x^2 - 3 \geqslant 0$ и $\frac{1}{x} > 0$.

Значит, $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$.

Таким образом, неравенство $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$

выполняется для любого $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Докажем, что неравенство $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$ выполняется для любого $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Третий способ.

Очевидно, что при $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$ выполняется неравенство $\frac{3x^2 - 2}{x} > 0$.

Ранее мы выяснили, что неравенство

$$\frac{3x^2 - 2}{x} < 3x^2 + \frac{1}{x} - 3 \qquad (*)$$

выполняется для любого $x > \sqrt{\frac{2}{3}}, x \neq 1$.

Неравенство $(*)$ можно переписать в виде $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > \frac{3x^2 - 2}{x} > 0$.

Так как при $x = 1$

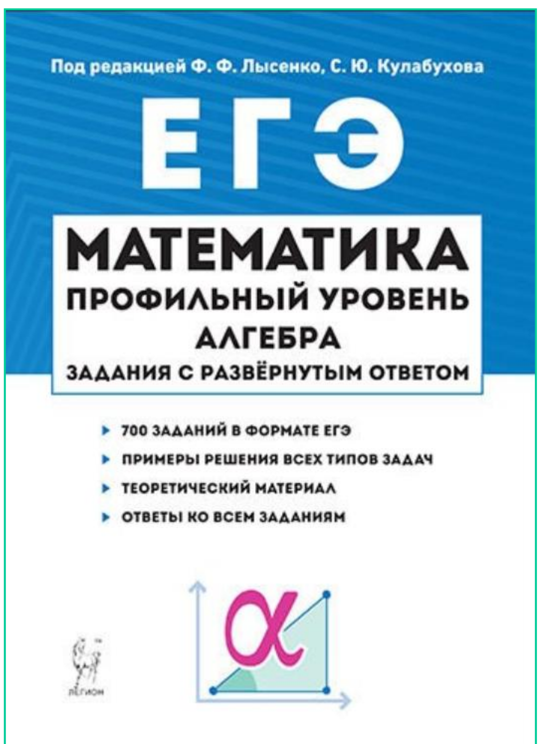
$3x^2 + \frac{1}{x} - 3 = \frac{3x^2 - 2}{x} = 1 > 0$, то $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$ при $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Итак, $x \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 1\right) \cup (1; +\infty)$ — решение исходного неравенства.

Ответ: $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Литература

1. **Дорофеев В. Г.** Обобщение метода интервалов // Математика в школе. 1969. №3.
2. **Голубев В.** Метод замены множителей // Квант, 2006. №4.
3. Математика. ЕГЭ. Алгебра: задания с развёрнутым ответом: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2019. — 448 с.
4. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2014: решаем задание С3 методом рационализации: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 32 с.
5. Математика. Подготовка к ЕГЭ. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств.



Издательство регулярно проводит онлайн-семинары авторов пособий с педагогами. По завершении каждого вебинара участники получают электронные сертификаты. Ссылки для участия вы сможете найти на сайте издательства www.legionr.ru

Все вебинары издательства «Легион» носят обучающий характер

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН
www.legionr.ru

legionrus@legionrus.com

Вступайте в группу

«Издательство «Легион»

В контакте, на одноклассниках

и в сети facebook.

Видео вебинаров смотрите на YouTube.

Адрес для корреспонденции:
344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН™
www.legionr.ru

Спасибо за внимание!