ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН
www.legionr.ru
Приказом Минобрнауки РФ №729 от 14.12.2009
пособия издательства «Легион» допускаются к использованию
в общеобразовательных учреждениях

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

Окружность в планиметрических задачах повышенного уровня ОГЭ и ЕГЭ

докладчик: Кулабухов Сергей Юрьевич

Обобщенный план варианта КИМ ЕГЭ 2020 года по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

(фрагмент)

16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2, 5.3	5.1	П	3	–	25

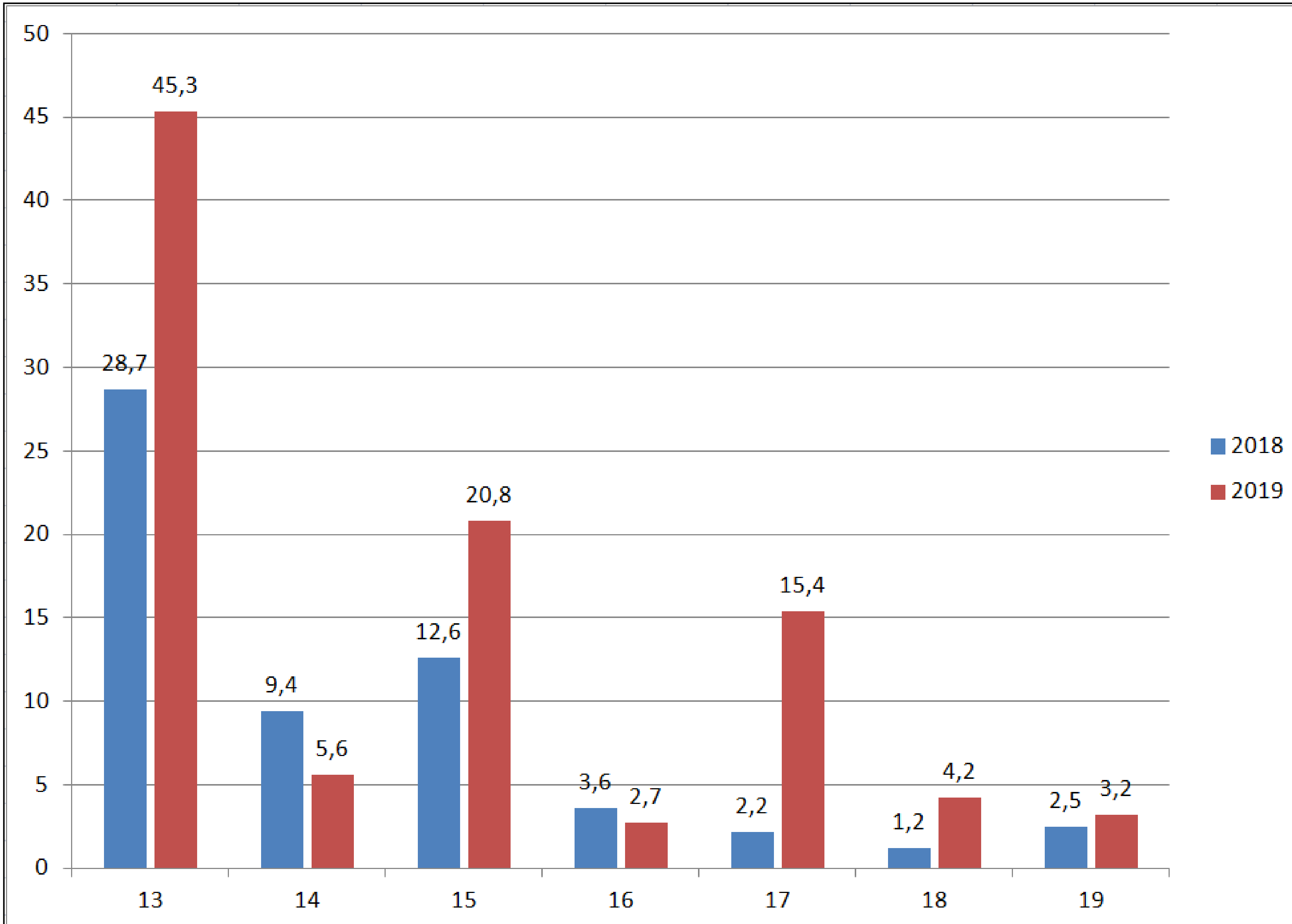
Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена

4		**Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами**
	4.1	Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)
5		**Уметь строить и исследовать простейшие математические модели**
	5.2	Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин
	5.3	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения

Кодификатор
элементов содержания по МАТЕМАТИКЕ
для составления контрольных измерительных материалов
для проведения единого государственного экзамена

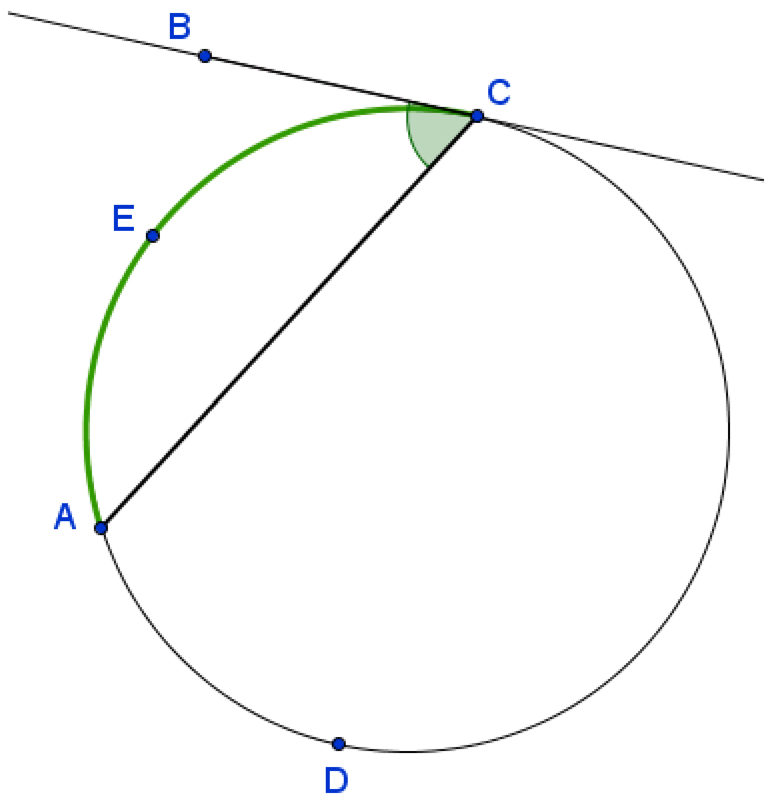
5		**Геометрия**
5.1		*Планиметрия*
	5.1.1	Треугольник
	5.1.2	Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат
	5.1.3	Трапеция
	5.1.4	Окружность и круг
	5.1.5	Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника
	5.1.6	Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника
	5.1.7	Правильные многоугольники. Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника

Выполнение заданий с развернутым ответом на профильном ЕГЭ по математике (средний процент выполнения)



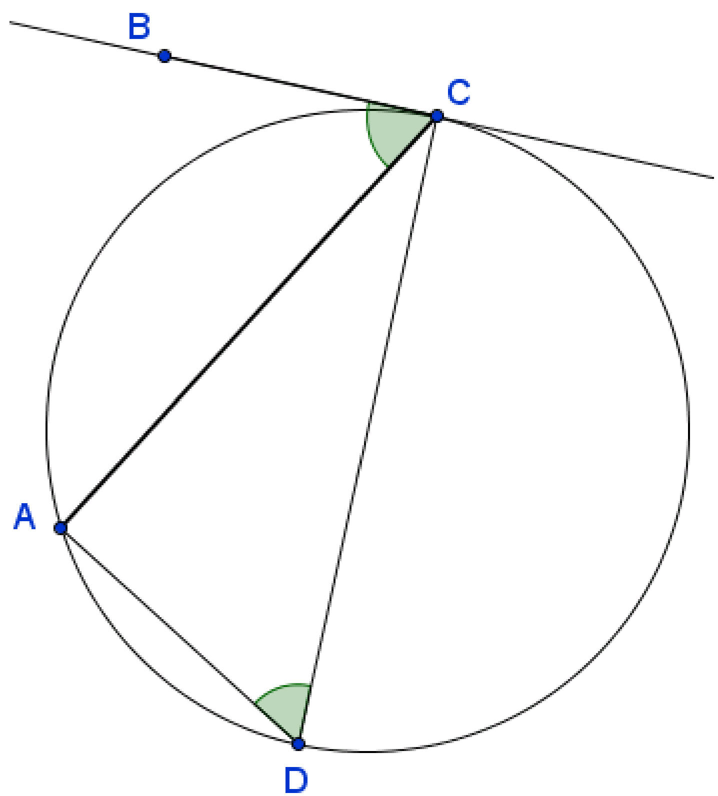
www.fipi.ru

Теорема. Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, равен половине угловой величины дуги, высекаемой на окружности этой хордой.



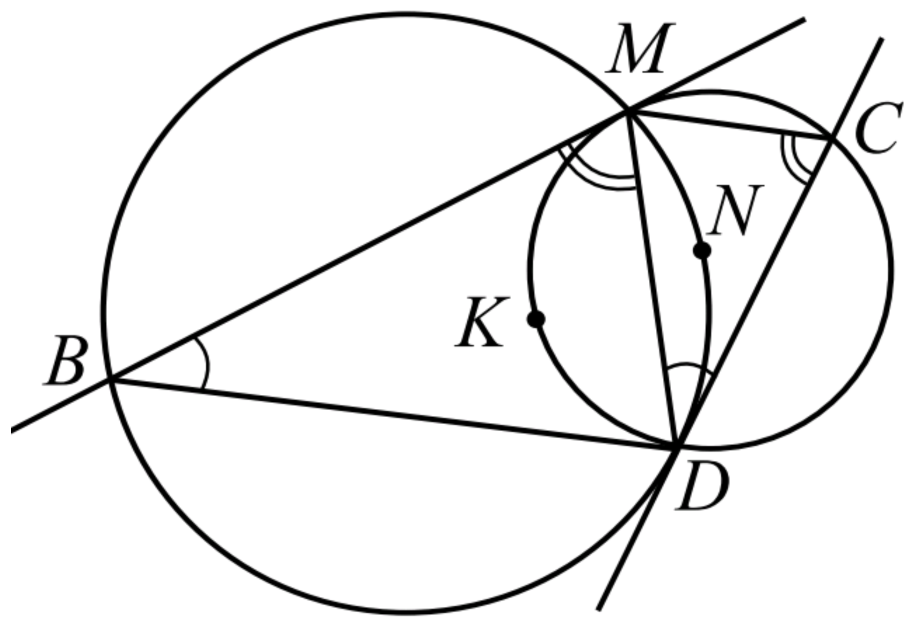
$$\angle ACB = \frac{1}{2}\,\overset{\smile}{AEC}$$

Полезное следствие

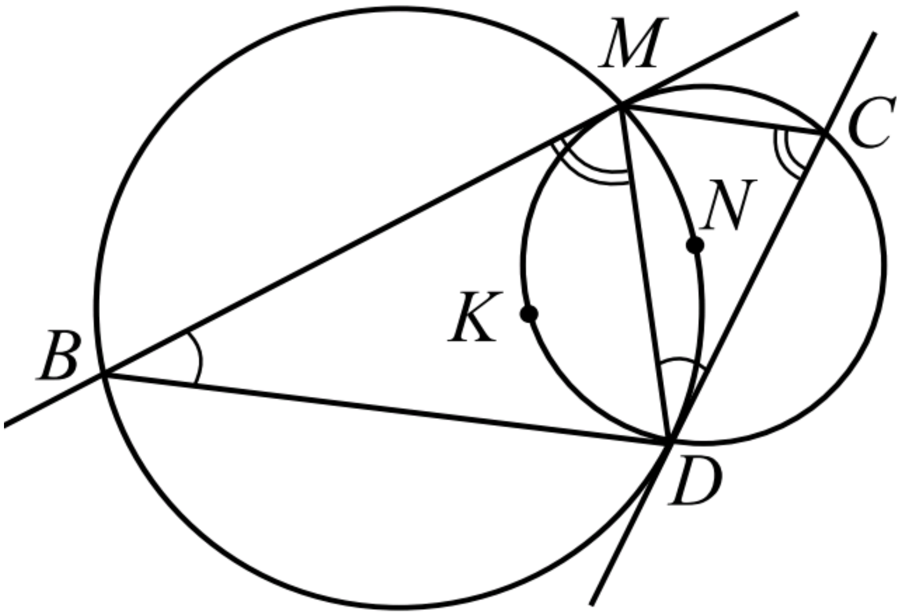


$$\angle ACB = \angle ADC$$

26 Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и D. MB и CD — касательные к первой и второй окружностям, B и C — точки на окружностях. $CD = 10$, MB в 2 раза больше CD. Найдите MC, если периметр $MBDC$ равен 45.



Решение



Угол между касательной MB и хордой MD равен углу MCD, опирающемуся на дугу MKD, то есть $\angle MCD = \angle BMD$. Аналогично $\angle MBD = \angle MDC$.

$\triangle MCD \sim \triangle DMB$, то есть $\dfrac{MC}{DM} = \dfrac{CD}{MB}$ и $\dfrac{MD}{DB} = \dfrac{CD}{MB}$.

Перемножая полученные равенства, получаем $\dfrac{MC}{BD} = \dfrac{DC^2}{MB^2}$. Обозначим $MC = x$, $BD = 45 - (10 + 20 + x) = 15 - x$, тогда

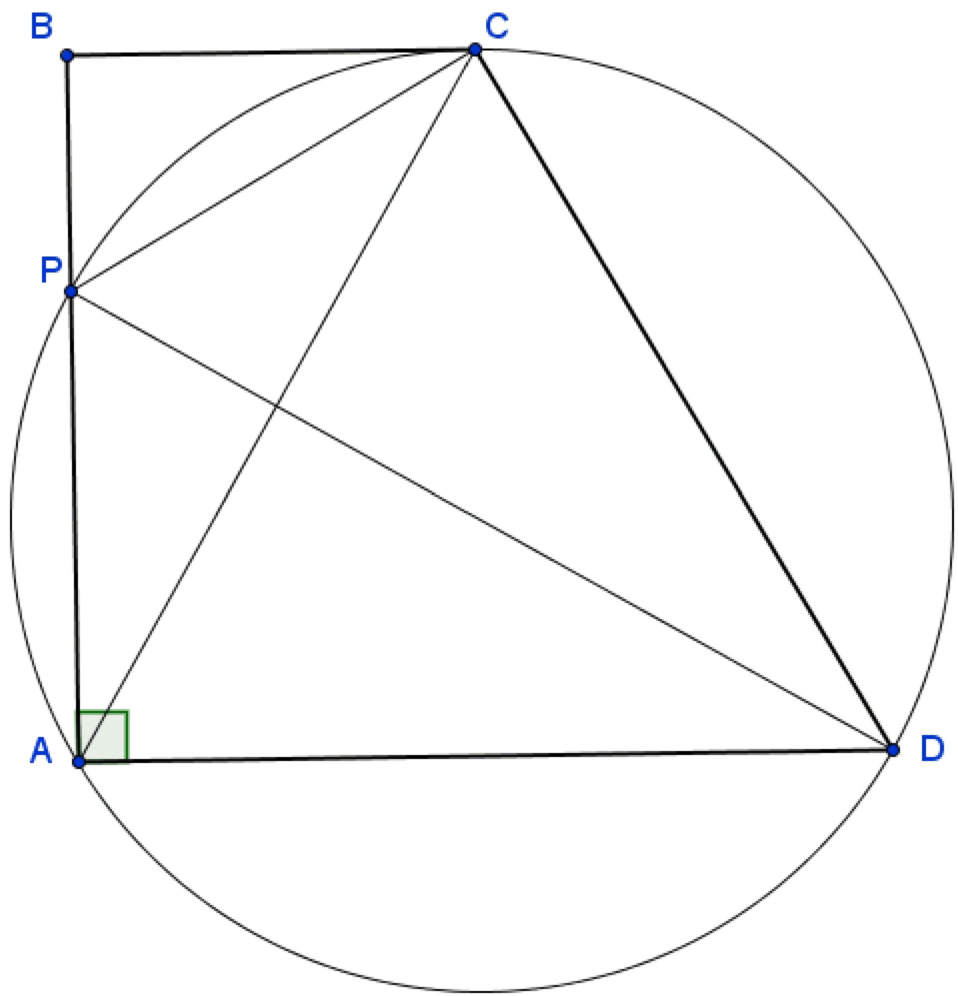
$\dfrac{x}{15 - x} = \left(\dfrac{10}{20}\right)^2$; $4x = 15 - x$; $5x = 15$; $x = 3$. Отсюда $MC = 3$.

Ответ: 3.

16 Окружность, проходящая через вершины A, C и D прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, пересекает меньшую боковую сторону AB в точке P и касается прямой BC. Известно, что $AD = CD$.

а) Докажите, что CP — биссектриса угла ACB.

б) В каком отношении прямая DP делит площадь трапеции?

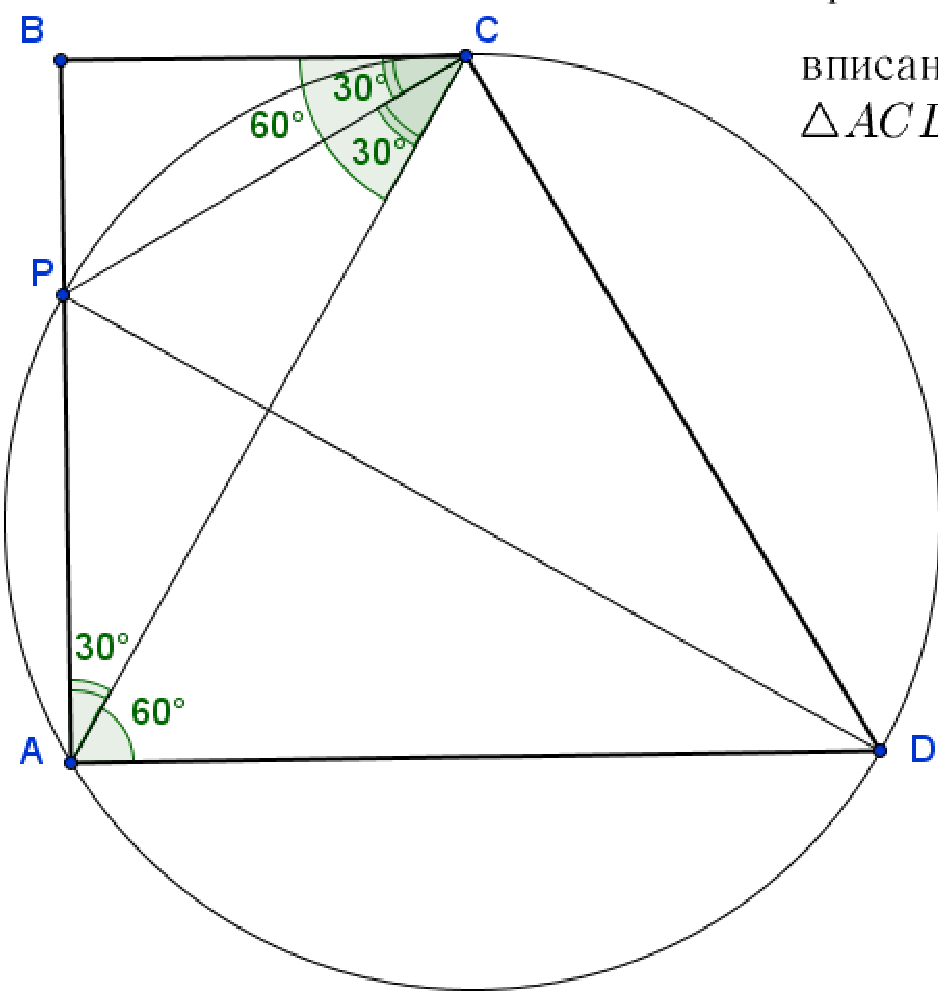


Решение

а) 1. Так как $AD = CD$, то $\triangle ACD$ равнобедренный. Значит, $\angle CAD = \angle ACD$.

2. $\angle CAD = \angle ACB$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC.

3. $\angle ACB = \frac{1}{2}\ \breve{AC}$ как угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания. Но $\angle ADC = \frac{1}{2}\ \breve{AC}$ как вписанный угол. Значит, $\angle ACB = \angle ADC$. Таким образом, $\triangle ACD$ равносторонний и $\angle ACB = \angle CAD = 60°$.



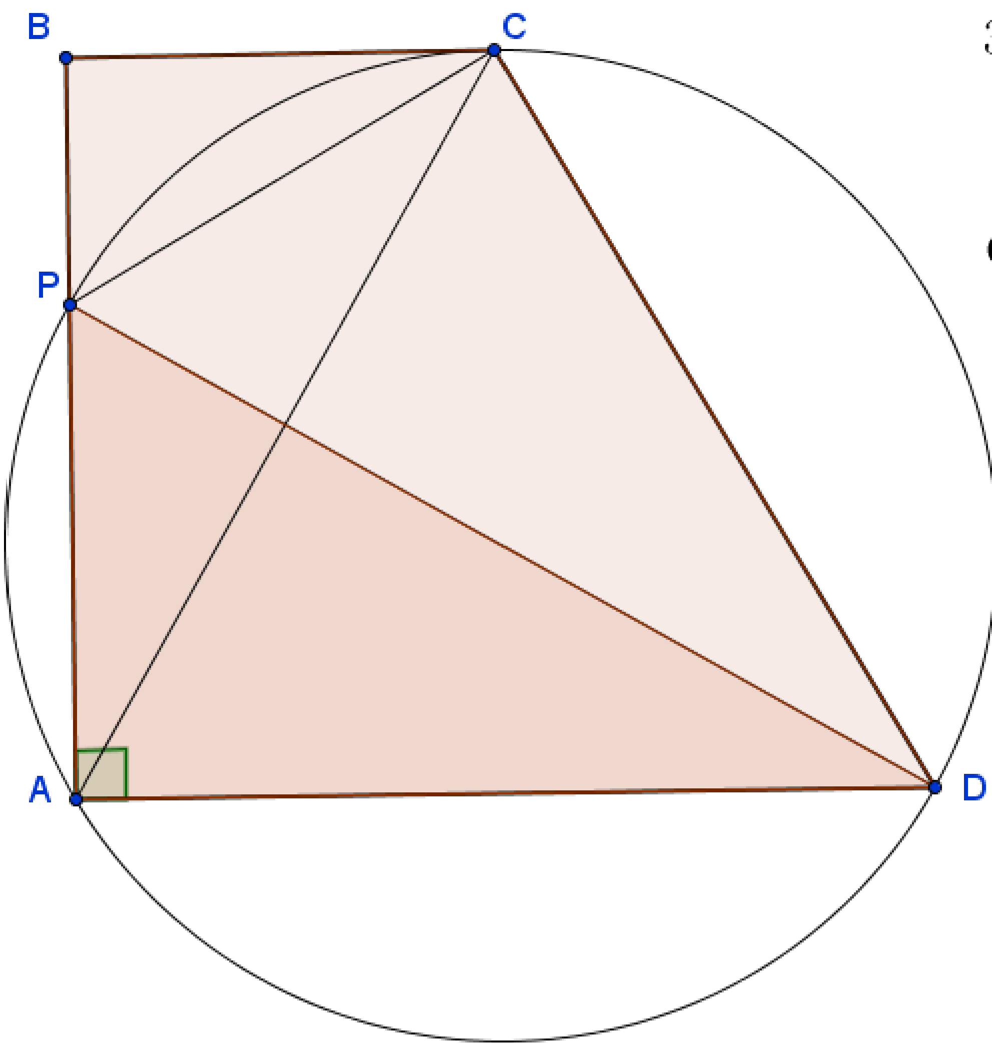
4. $\angle PCB = \frac{1}{2}\ \breve{PC}$ как угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания. Но $\angle PAC = \frac{1}{2}\ \breve{PC}$ как вписанный угол. Значит, $\angle PCB = \angle PAC$.

5. Так как $\angle PAC = 90° - \angle CAD = 90° - 60° = 30°$, то $\angle PCA = \angle ACB - \angle PCB = 60° - 30° = 30°$, то есть $\angle PCB = \angle PCA$ и CP — биссектриса $\angle ACB$.

Решение

б) 1. Обозначим сторону равностороннего треугольника ACD через a. Тогда в прямоугольном $\triangle ABC$ $AC = a$, $BC = \frac{a}{2}$ как катет, лежащий против угла в $30°$. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$2.\ S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$



3. Так как CP — биссектриса $\triangle ABC$, то

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда, $PA = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$4.\ S_{PAD} = \frac{1}{2} \cdot PA \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

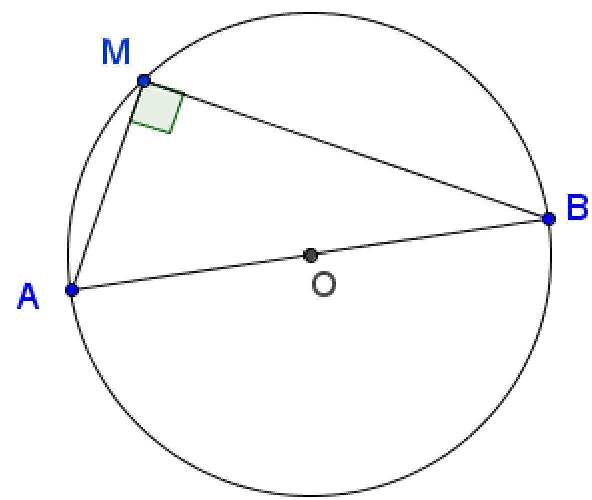
$$5.\ S_{BCDP} = S_{ABCD} - S_{PAD} = \\ = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{a^2\sqrt{3}}{6} = \frac{5}{24}a^2\sqrt{3}.$$

$$6.\ S_{BCDP} : S_{PAD} = \frac{5}{24}a^2\sqrt{3} : \frac{a^2\sqrt{3}}{6} = 5 : 4.$$

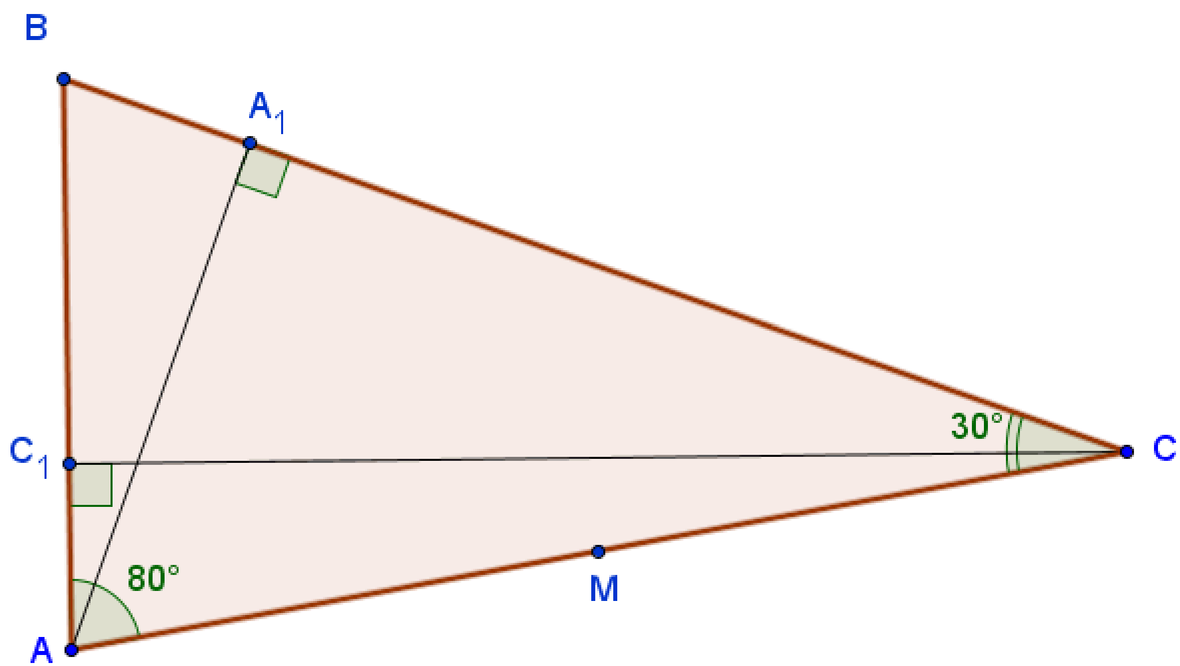
Ответ: $5 : 4$.

Замечательное свойство окружности

Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90^\circ$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.



24 Точка M — середина стороны AC треугольника ABC, $\angle BAC = 80°$, $\angle BCA = 30°$. В треугольнике проведены высоты AA_1 и CC_1. Найдите величину угла A_1MC_1.



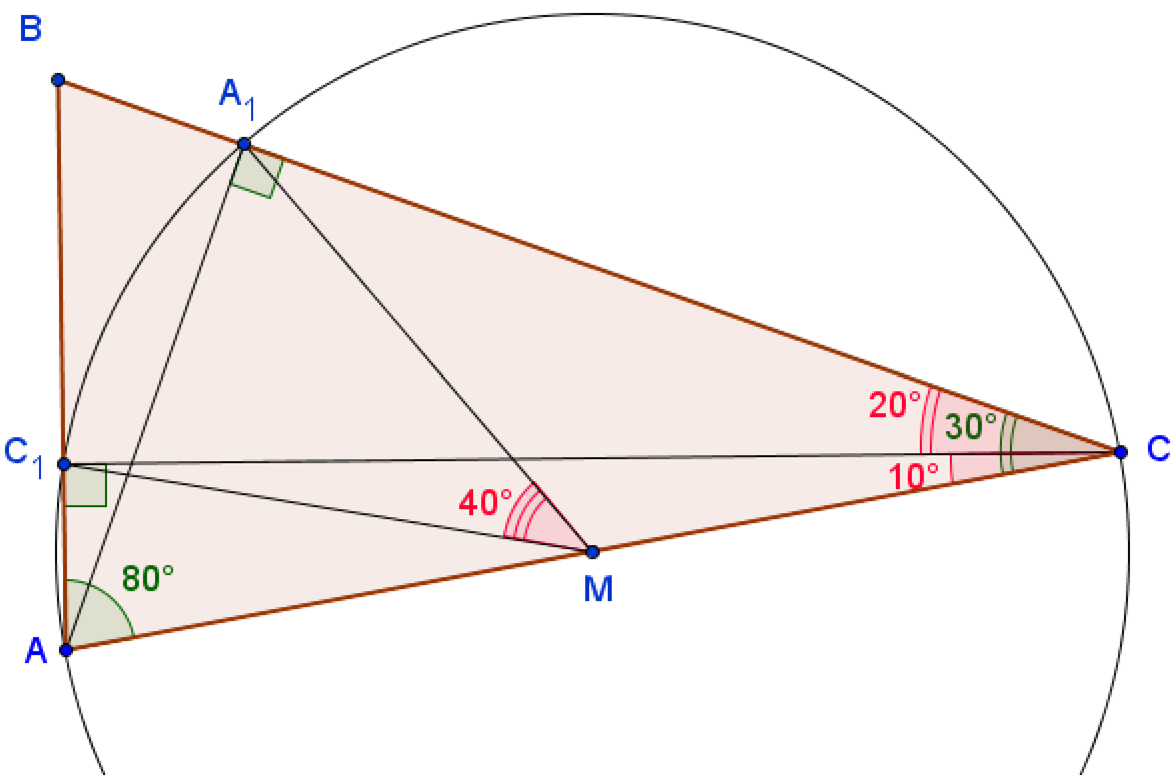
Решение

1. Так как из точек A_1 и C_1 отрезок AC виден под прямым углом, то точки A, C_1, A_1 и C лежат на одной окружности с диаметром AC и центром M.

2. В треугольнике ACC_1: $\angle ACC_1 = 90° - \angle C_1AC = 90° - 80° = 10°$. Тогда $\angle C_1CA_1 = 30° - 10° = 20°$.

3. $\angle A_1MC_1 = 2 \cdot \angle C_1CA_1 = 2 \cdot 20° = 40°$ (вписанный и центральный углы опираются на одну и ту же дугу).

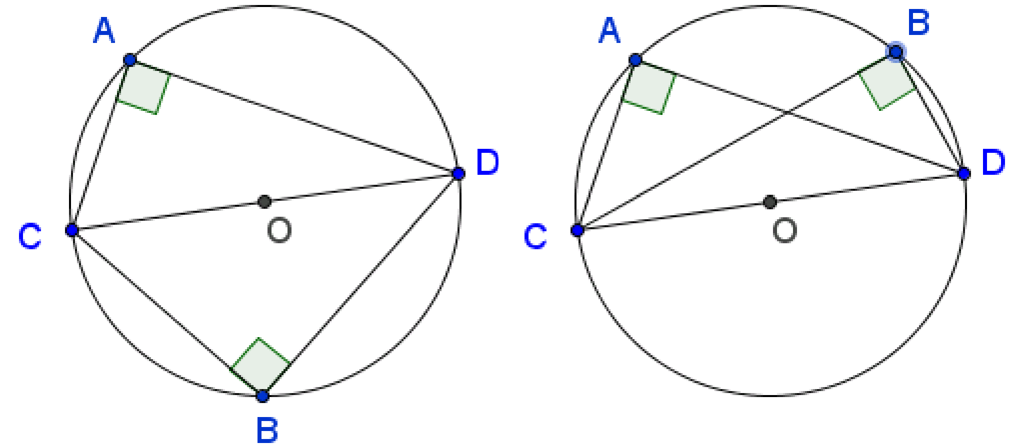
Ответ: $40°$.

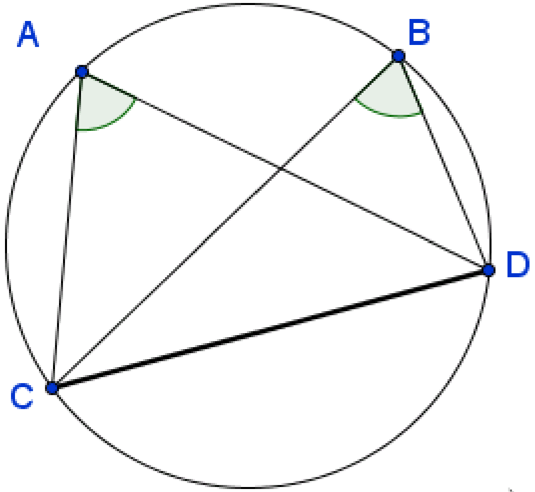


Условие принадлежности четырёх точек одной окружности

Если выполняется одно из следующих условий, то четыре точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

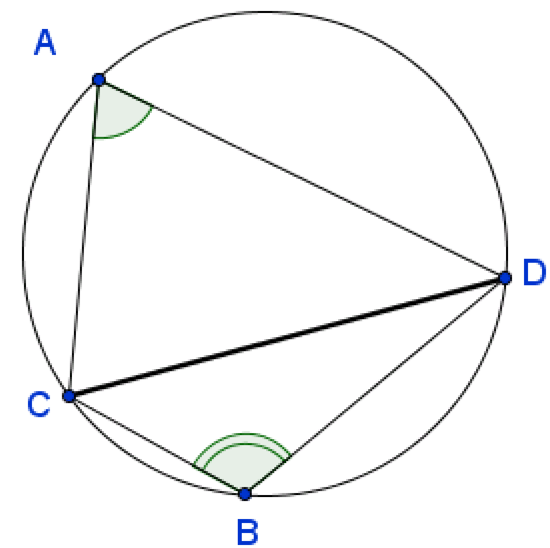
а) $\angle CAD = \angle CBD = 90^\circ$.

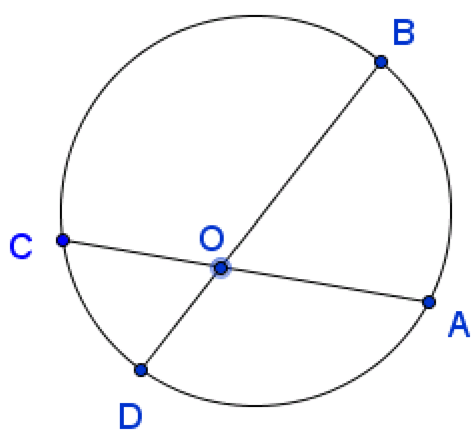




б) Точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD и $\angle CAD = \angle CBD$.

в) Точки A и B лежат по разные стороны от прямой CD и $\angle CAD + \angle CBD = 180^\circ$.

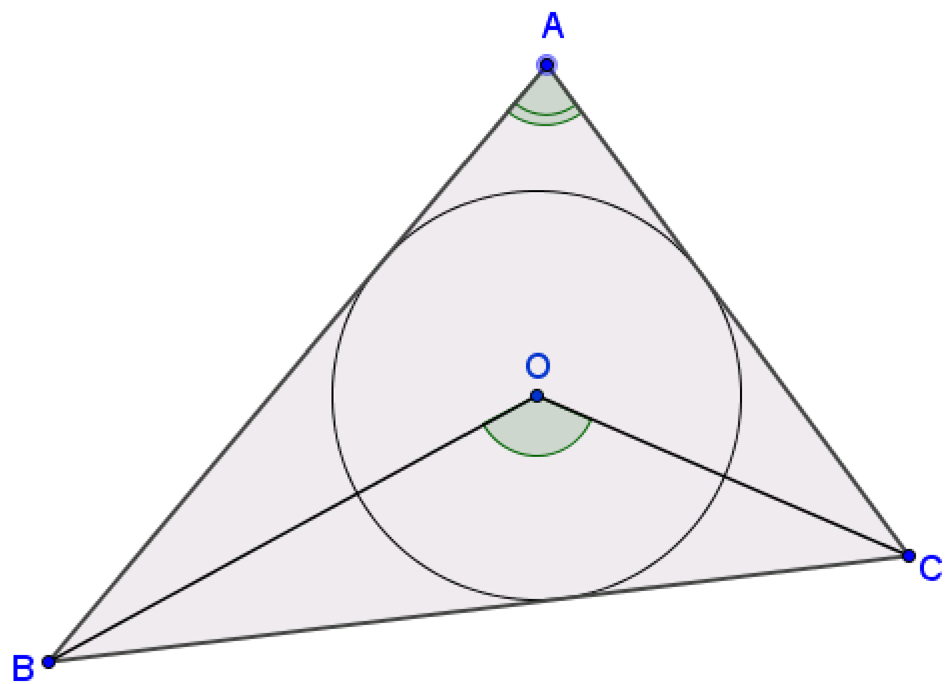




г) Прямые AC и BD пересекаются в точке O и $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

Теорема. Если O — центр вписанной окружности треугольника ABC, то

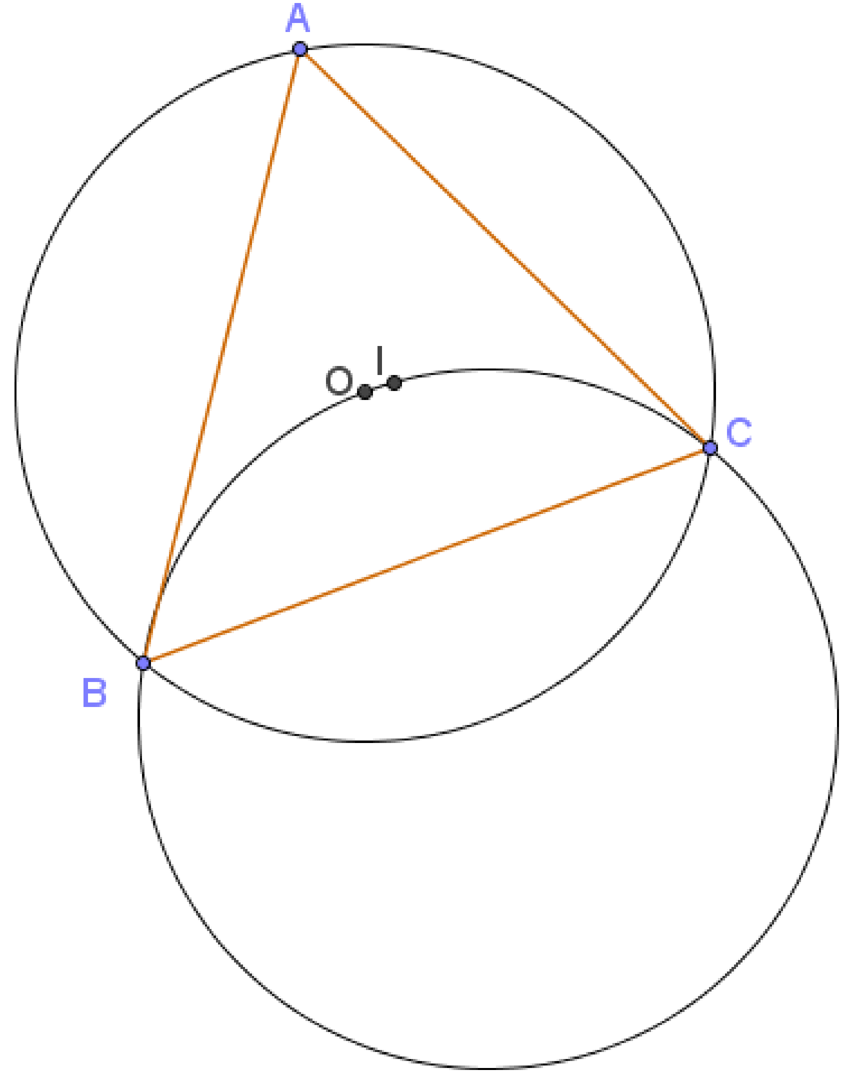
$$\angle BOC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$



16 Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OIH, если $\angle ABC = 55°$.



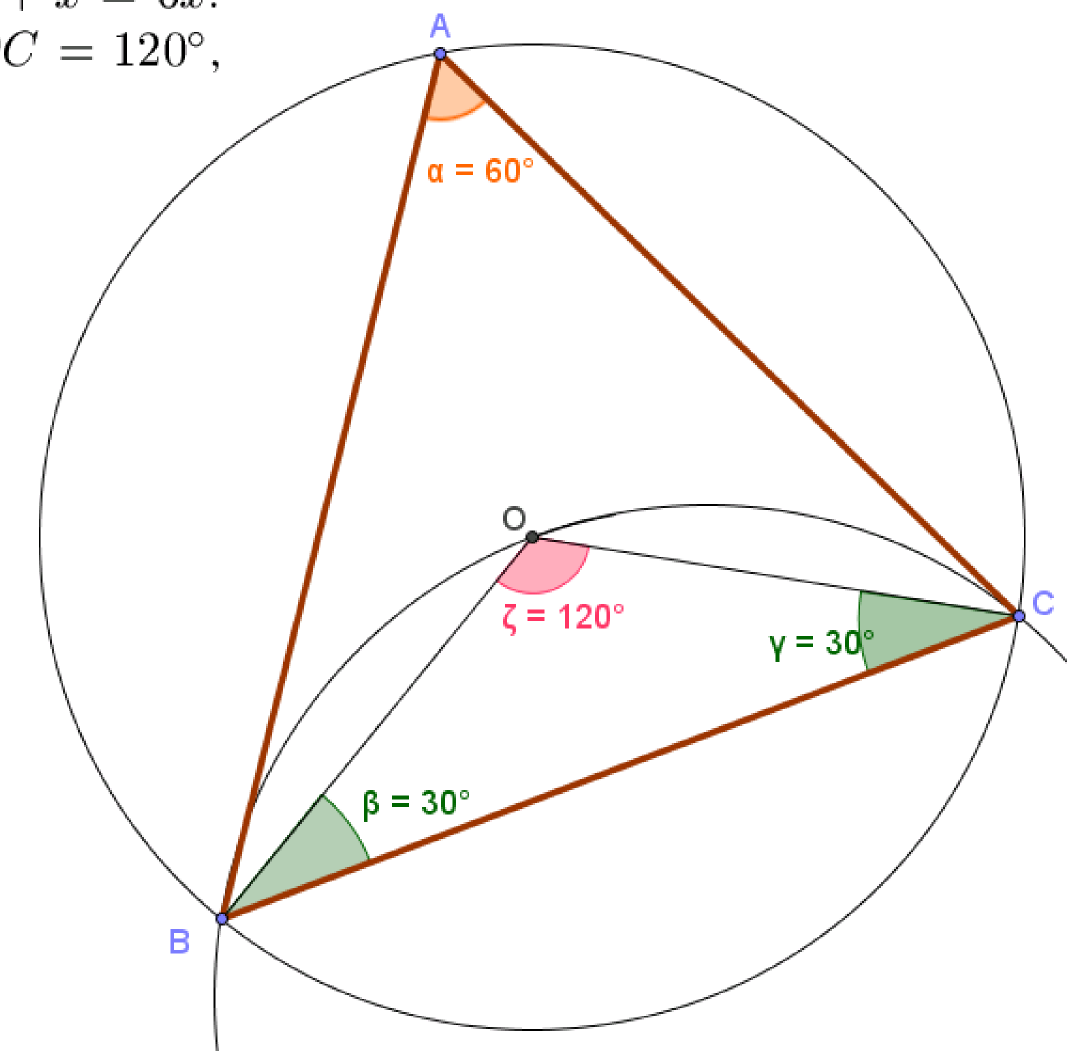
Решение

а) 1. Так как OB и OC — радиусы описанной вокруг треугольника ABC окружности, то $OB = OC$ и $\triangle OBC$ равнобедренный. Значит, $\angle OBC = \angle OCB$.

Пусть $\angle OBC = \angle OCB = x$.

Тогда, по условию $\angle A = \angle OBC + \angle OCB = 2x, \angle BOC = 2\angle A = 4x$, так как $\angle A$ и $\angle BOC$ вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности.

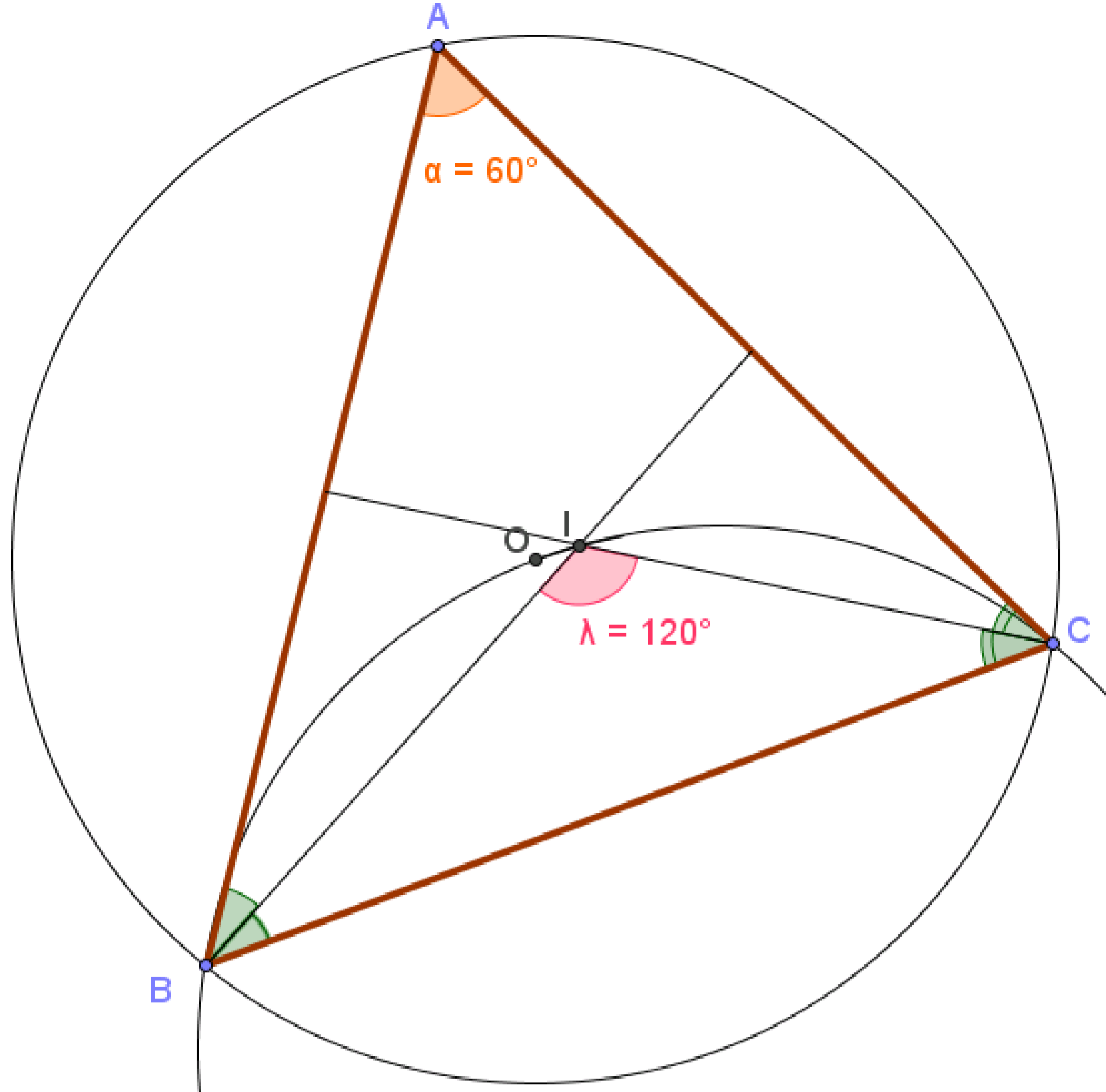
В треугольнике BOC сумма углов равна $4x + x + x = 6x$. Тогда $6x = 180°, x = 30°$. Следовательно, $\angle BOC = 120°$, $\angle A = 60°$ и $\angle OBC = \angle OCB = 30°$.



2. $\angle BIC = 180^\circ - \dfrac{\angle B}{2} - \dfrac{\angle C}{2} = 180^\circ - \dfrac{1}{2}(\angle B + \angle C)$ (I — точка пересечения биссектрис).

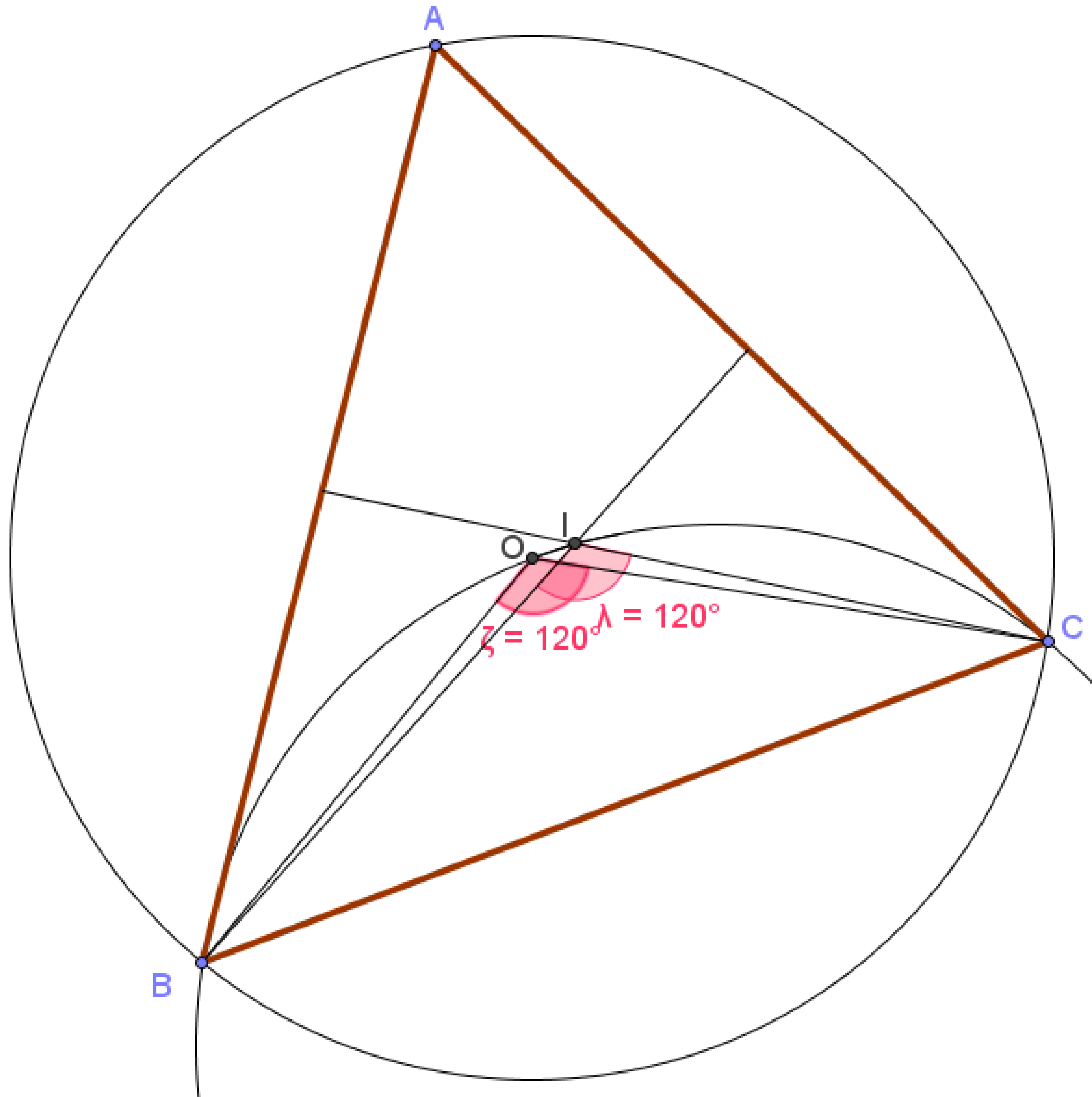
Но из треугольника ABC следует, что $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A$. Тогда

$$\angle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$



3. Так как $\angle BOC = \angle BIC$, то отрезок BC из точек O и I виден под одним и тем же углом.

Значит, точки B, C, I и O лежат на одной окружности — окружности, описанной около треугольника BOC.



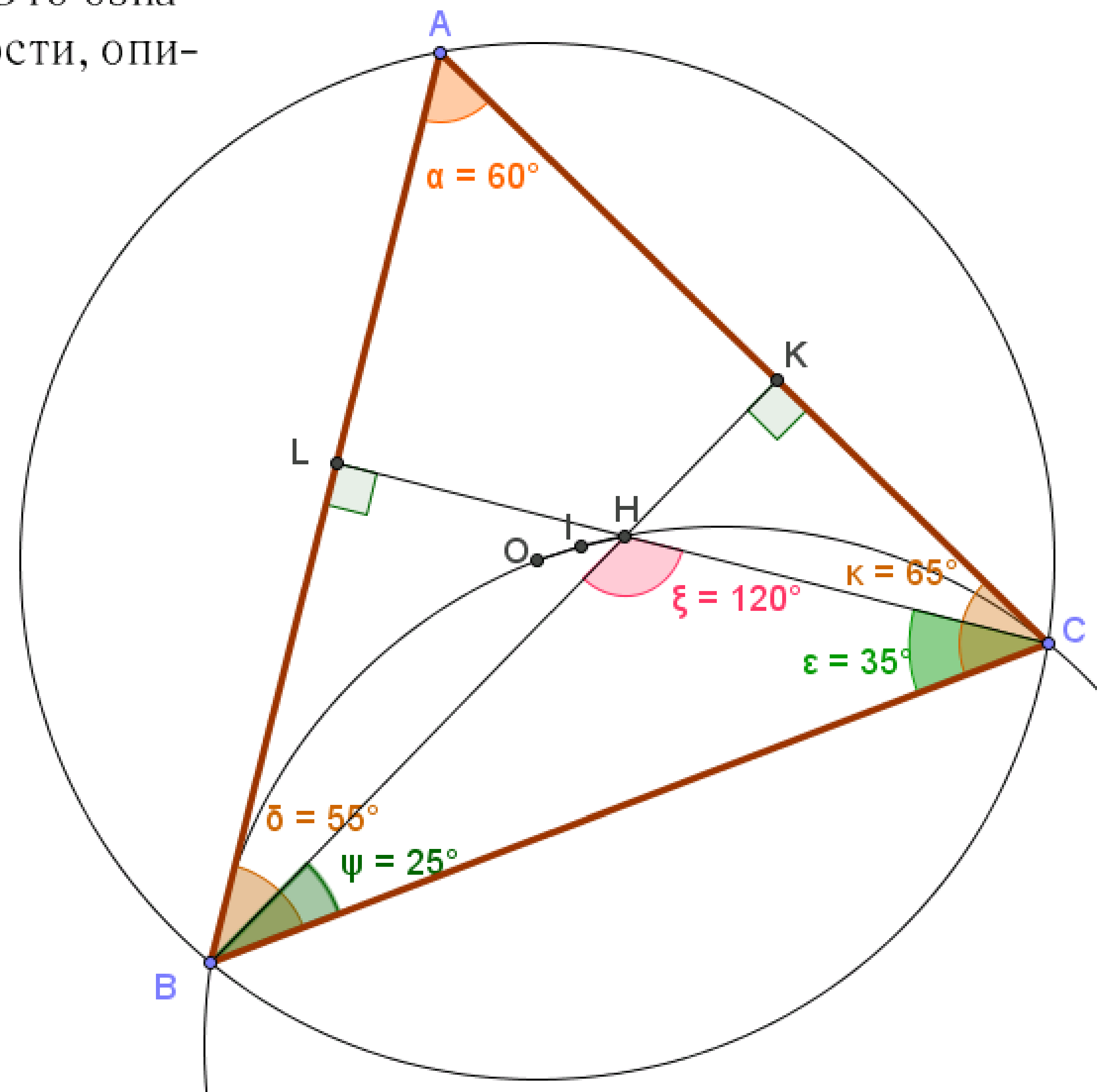
б) 1. Так как по условию $\angle B = 55^\circ$, то

$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 60^\circ - 55^\circ = 65^\circ$.

2. Так как треугольники BCL и BKC прямоугольные, то

$$\angle HBC = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ \text{ и}$$
$$\angle HCB = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

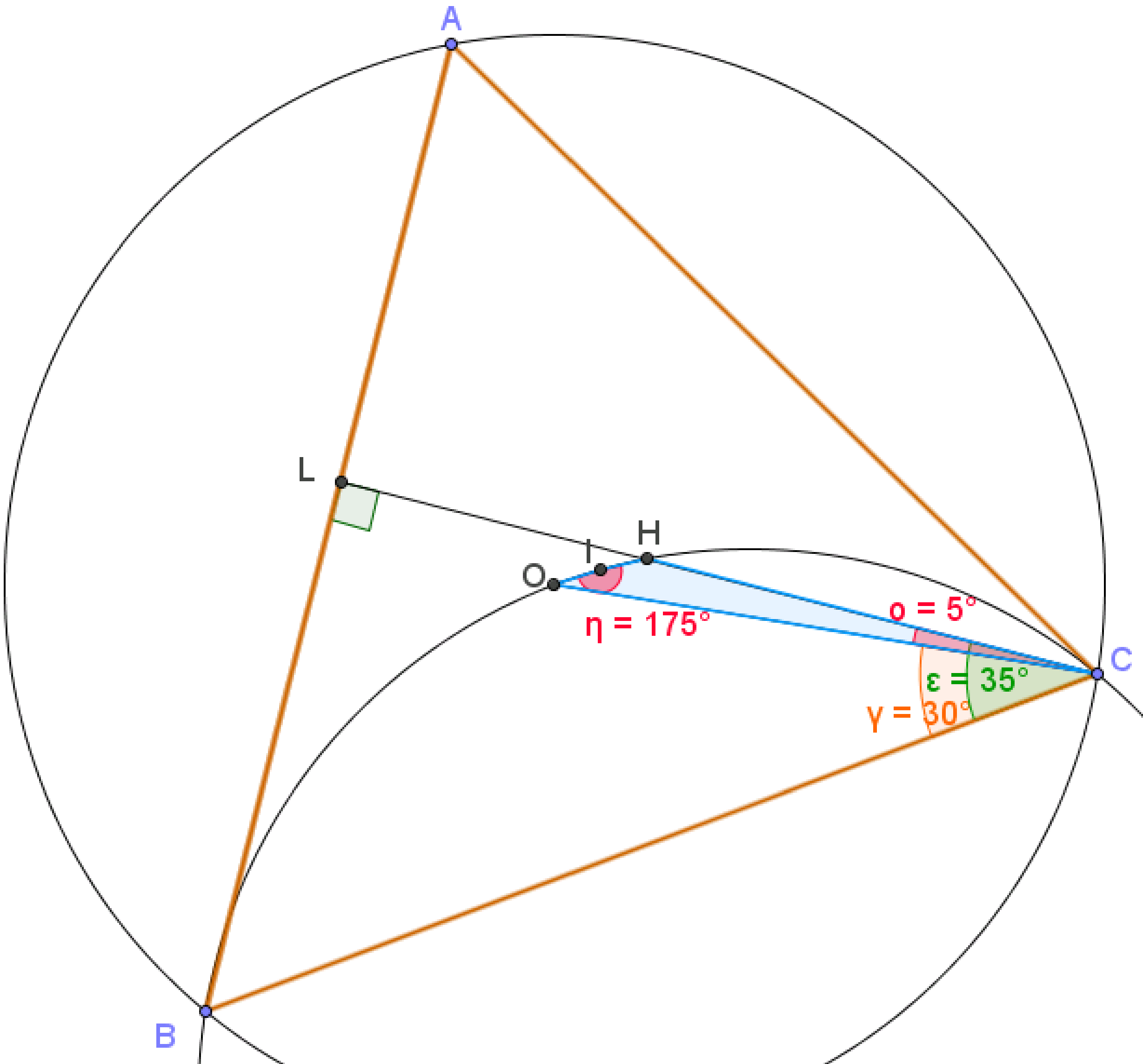
Тогда $\angle BHC = 180^\circ - 25^\circ - 35^\circ = 120^\circ$. Это означает, что точка H также лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.



3. Четырёхугольник $OIHC$ вписан в окружность. Значит, $\angle OIH = 180° - \angle OCH$. Но $\angle OCH = \angle HCB - \angle OCB = 35° - 30° = 5°$.

Следовательно, $\angle OIH = 180° - 5° = 175°$.

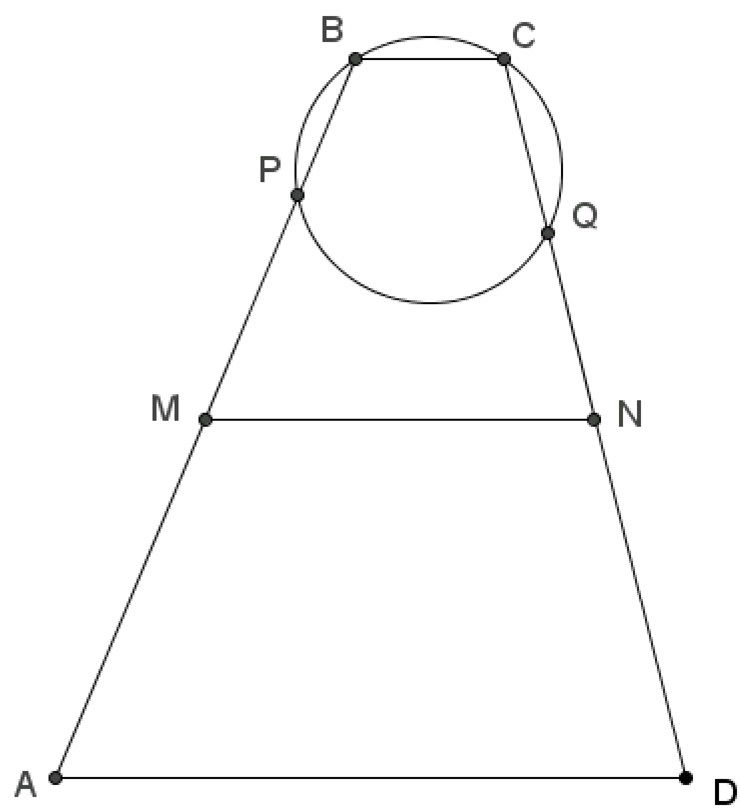
Ответ: $175°$.



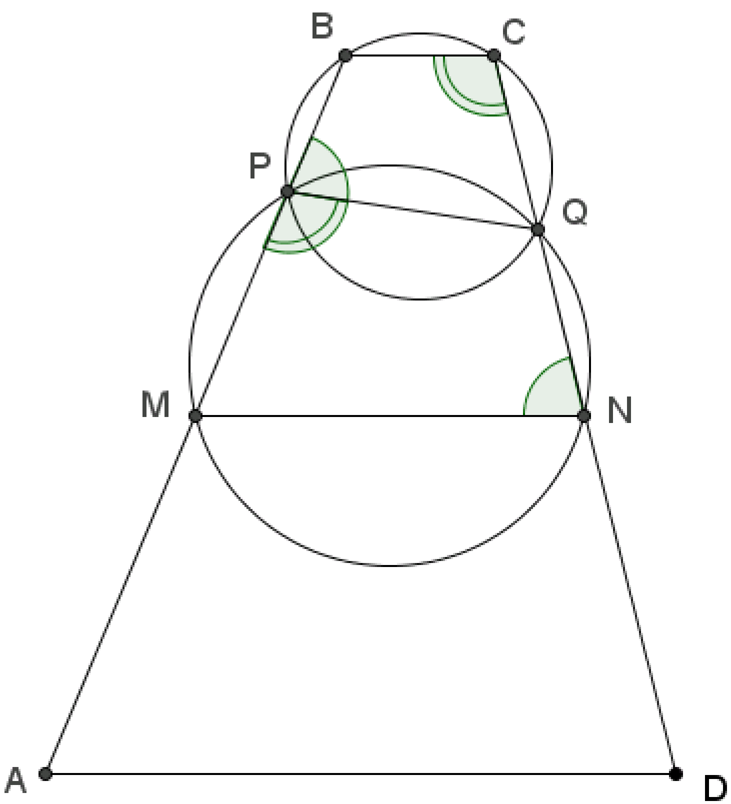
16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков) соответственно.

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите QN, если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB=21$, $BC=4$, $CD=20$, $AD=17$.



Решение 1



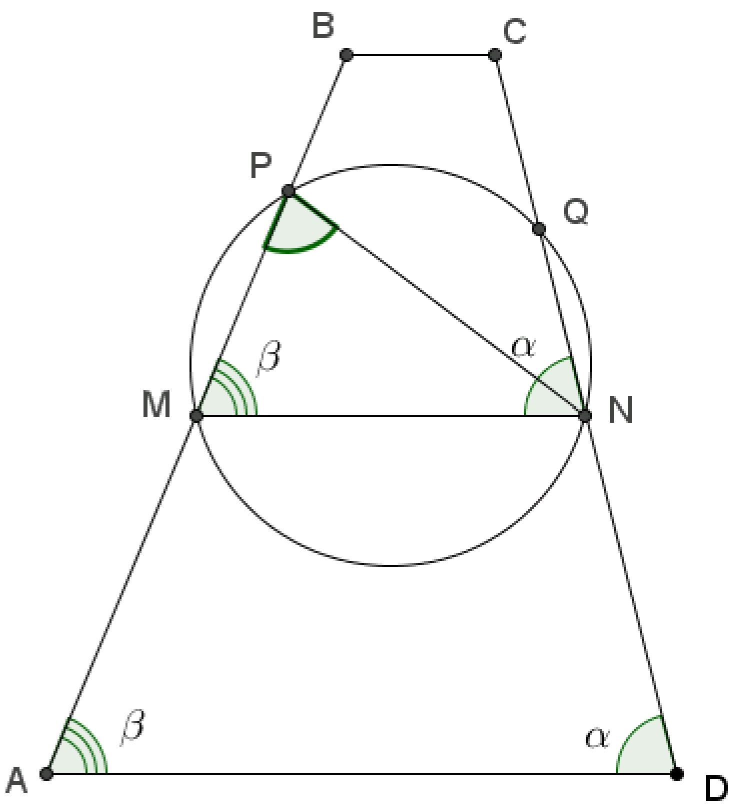
а) 1) Так как четырёхугольник $PBCQ$ вписан в окружность, то $\angle BPQ + \angle BCQ = 180°$.

Так как $\angle BPM$ развёрнутый, то $\angle BPQ + \angle QPM = 180°$. Следовательно, $\angle BCQ = \angle QPM$.

2) Так как MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то $MN \parallel BC$ и $MBCN$ — тоже трапеция. Отсюда,
$\angle MNQ + \angle BCQ = 180°$.

3) Так как $\angle BCQ = \angle QPM$,
то $\angle MNQ + \angle QPM = 180°$.
Так как в четырёхугольнике $MPQN$ сумма противоположных углов равна $180°$, то вокруг $MPQN$ можно описать окружность.

Решение 1 (продолжение)



б) 1) Пусть h — высота трапеции $ABCD$.

Тогда $\sin\alpha = \dfrac{h}{CD} = \dfrac{h}{20}$, $\sin\beta = \dfrac{h}{AB} = \dfrac{h}{21}$.

Отсюда, $\sin\alpha = \dfrac{21}{20}\sin\beta$.

2) Так как PN — медиана прямоугольного $\triangle CPD$, проведённая из вершины прямого угла, то $PN = \dfrac{1}{2}CD = 10$.

$MN = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{4+17}{2} = 10{,}5$ (MN — средняя линия $ABCD$).

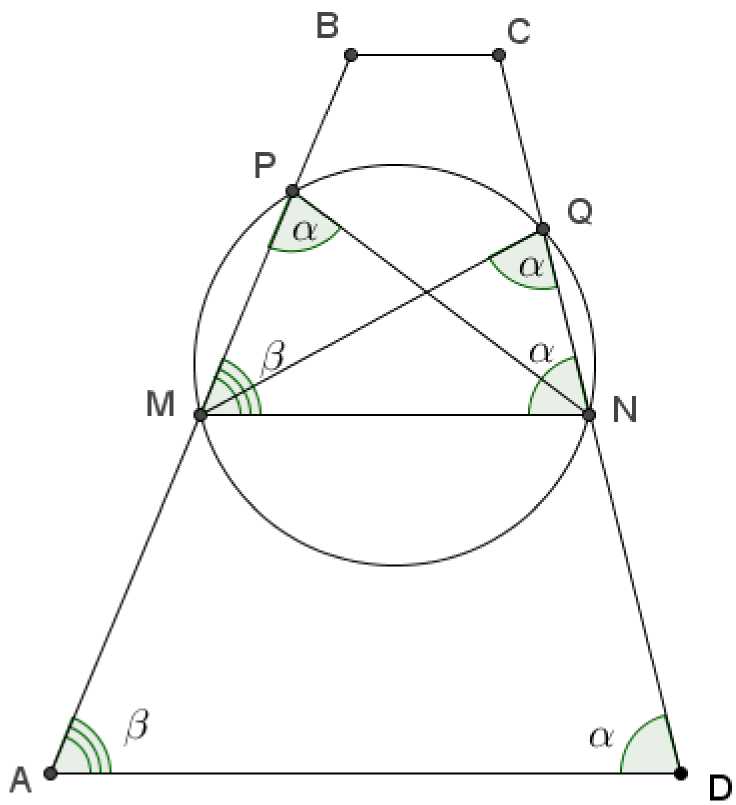
3) Так как $MN \parallel AD$, то $\angle MNC = \angle ADC = \alpha$ и $\angle BMN = \angle BAD = \beta$ как соответственные углы.

По теореме синусов для $\triangle MNP$:

$$\frac{MN}{\sin\angle MPN} = \frac{PN}{\sin\beta}.$$

Отсюда, $\sin\angle MPN = \dfrac{MN}{PN}\sin\beta = \dfrac{21}{20}\sin\beta$.

Решение 1 (продолжение)

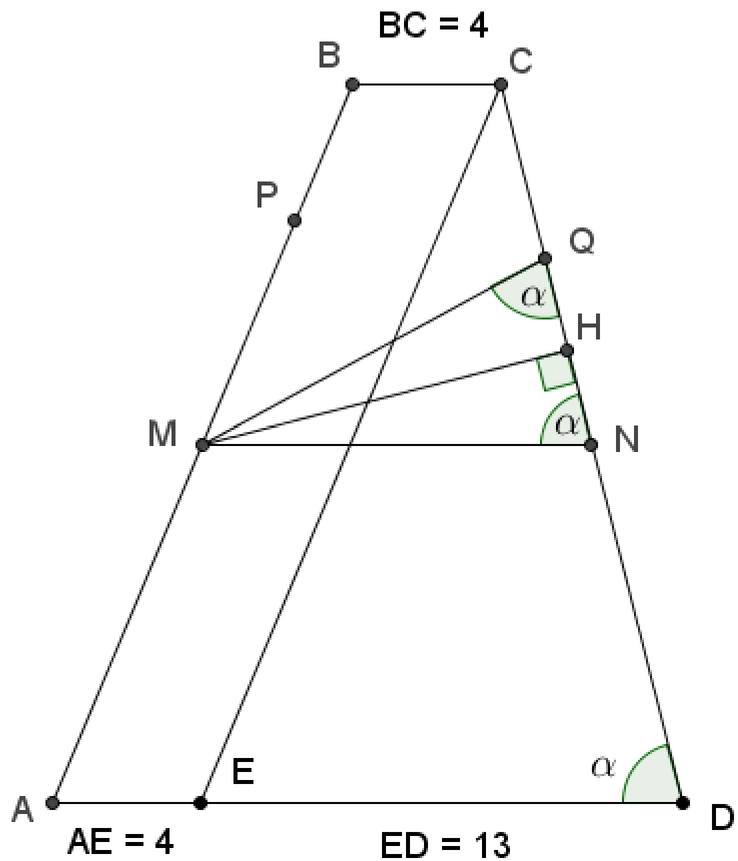


4) Из пунктов 1 и 3 следует, что $\sin \angle MPN = \sin \alpha$. Значит, $\angle MPN = \alpha$ или $\alpha + \angle MPN = 180°$.

5) Предположим, что $\alpha + \angle MPN = 180°$. Тогда точки A, P, N и D лежат на одной окружности. В пункте а) доказано, что точки M, P, Q и N лежат на одной окружности. Значит и точки A, P, Q и D тоже лежат на одной окружности, так как $MN \parallel AD$.
Отсюда следует, что точки Q и N совпадают, что противоречит условию.
Итак, $\angle MPN = \alpha$.

6) $\angle MPN = \angle MQN = \alpha$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Следовательно, ΔMQN равнобедренный.

Решение 1 (окончание)



7) Пусть $CE \parallel AB$. Тогда по теореме косинусов для $\triangle CED$:

$CE^2 = CD^2 + ED^2 - 2 \cdot CD \cdot ED \cdot \cos\alpha$;

$21^2 = 20^2 + 13^2 - 2 \cdot 20 \cdot 13 \cdot \cos\alpha$;

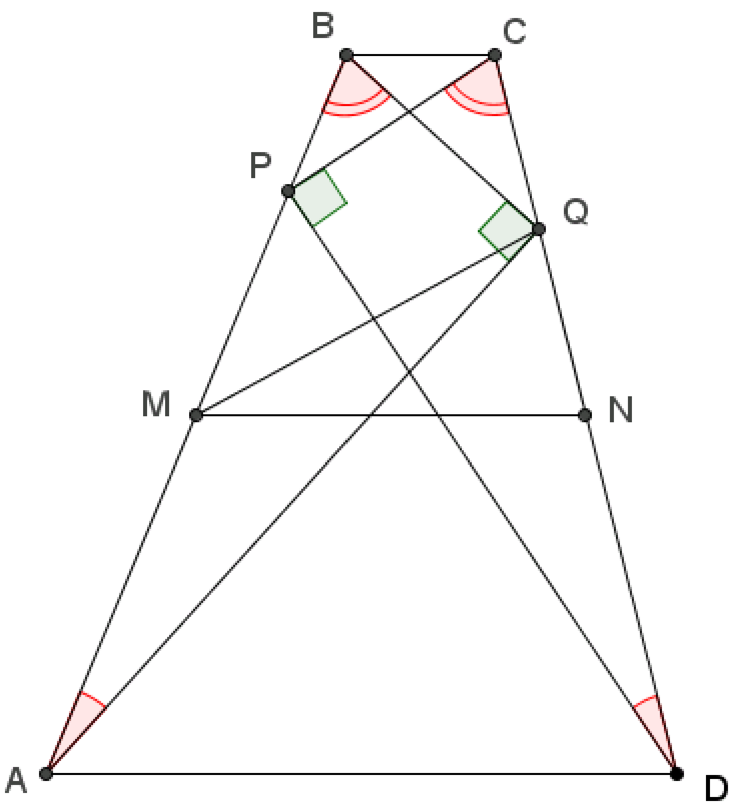
$\cos\alpha = \dfrac{16}{65}$.

8) Пусть MH — высота и медиана равнобедренного $\triangle MQN$. Тогда

$QN = 2NH = 2 \cdot MN \cdot \cos\alpha = 2 \cdot 10{,}5 \cdot \dfrac{16}{65} = \dfrac{336}{65}$.

Ответ: $\dfrac{336}{65}$.

Решение 2



а) См. решение 1.

б) 1) В пункте а) доказано, что точки M, P, Q и N лежат на одной окружности. Значит и точки A, P, Q и D тоже лежат на одной окружности, так как $MN \parallel AD$.

2) $\angle PBQ = \angle PCQ$ и $\angle PAQ = \angle PDQ$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу.

Так как в $\triangle ABQ$ сумма острых углов равна $90°$, то этот треугольник прямоугольный.

3) Так как MQ — медиана прямоугольного $\triangle ABQ$, проведённая из вершины прямого угла, то $MQ = \dfrac{1}{2}AB = 10{,}5$.

$MN = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{4 + 17}{2} = 10{,}5$ (MN — средняя линия $ABCD$).

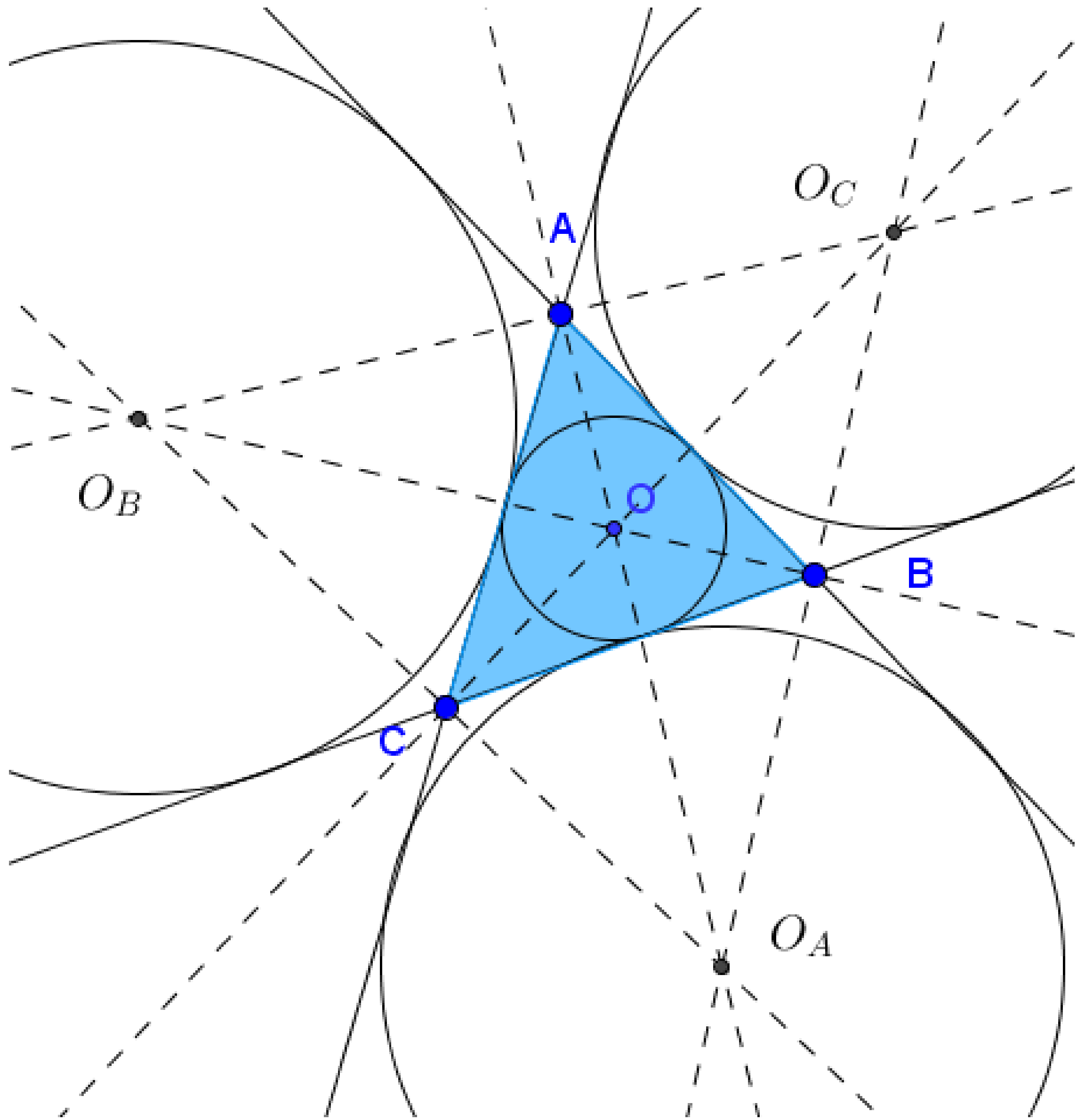
Таким образом, $\triangle MQN$ равнобедренный.

Далее аналогично пунктам 7 и 8 части б) решения 1.

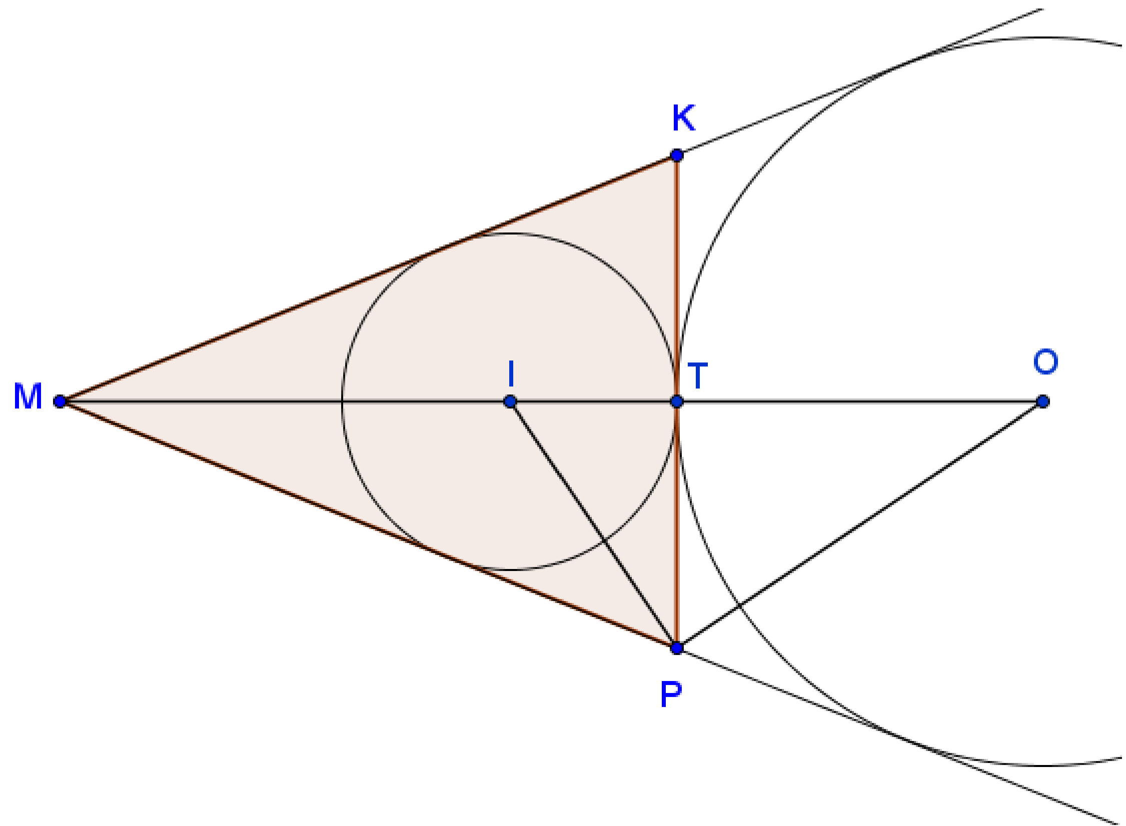
Ответ: $\dfrac{336}{65}$.

Вневписанная окружность

- ***Вневписанной окружностью треугольника*** называется окружность, касающаяся одной из его сторон и продолжений двух других. Для каждого треугольника существует три вневписанных окружности, которые расположены вне треугольника, почему они и получили название вневписанных.
- ***Центрами*** вневписанных окружностей являются точки пересечения биссектрис внешних углов треугольника.
- Центр вневписанной окружности лежит на пересечении биссектрисы одного внутреннего угла и биссектрис внешних углов при двух других вершинах. Шесть биссектрис треугольника — три внутренние и три внешние — пересекаются по три в четырех точках — центрах вписанной и трех вневписанных окружностей.



26 Основание PK равнобедренного треугольника MPK равно 30. Окружность радиусом 20 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания PK. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MPK.



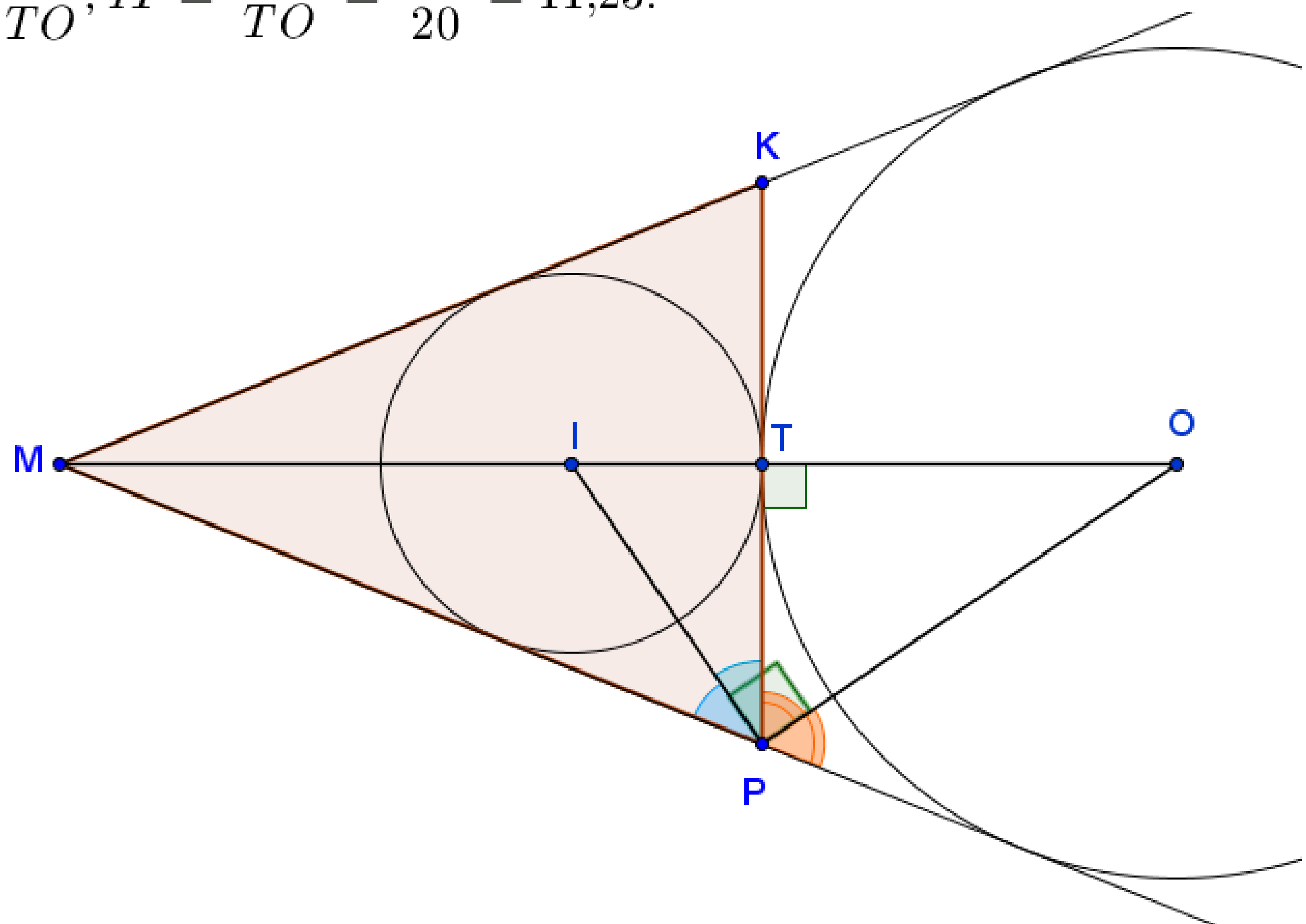
Решение

1. Так как $\angle ITP = 90°$ (радиус, проведённый в точку касания), то MT — высота равнобедренного треугольника MPK. Значит, MT — медиана $\triangle MPK$, то есть $PT = \frac{1}{2}PK = 15$.

2. $\angle IPO = 90°$ как угол между биссектрисами двух смежных углов.

Так как PT — высота прямоугольного треугольника IPO, проведённая из вершины прямого угла, то $\triangle ITP \sim \triangle IPO$ и $\triangle IPO \sim \triangle PTO$ (прямоугольные треугольники, имеющие общий острый угол). Отсюда, $\triangle ITP \sim \triangle PTO$, то есть $\dfrac{IT}{TP} = \dfrac{TP}{TO}$, $IT = \dfrac{PT^2}{TO} = \dfrac{15^2}{20} = 11{,}25$.

Ответ: 11,25.

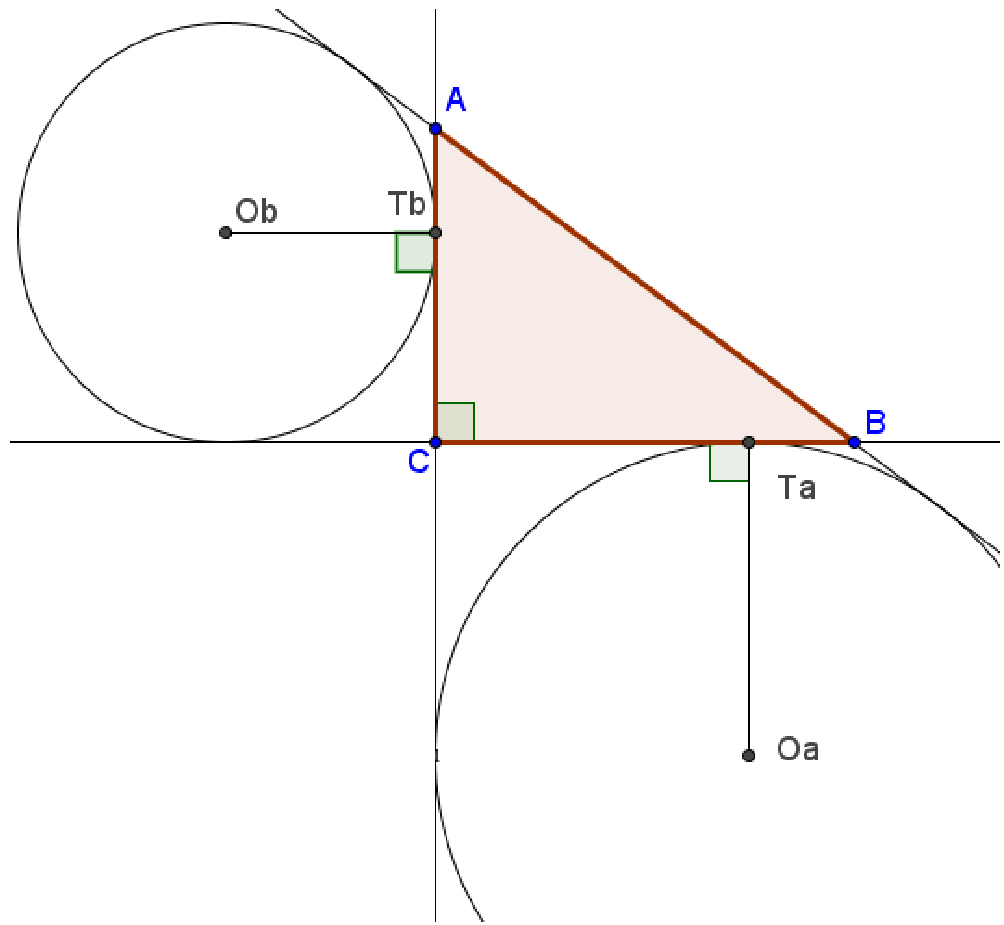


Задача 1

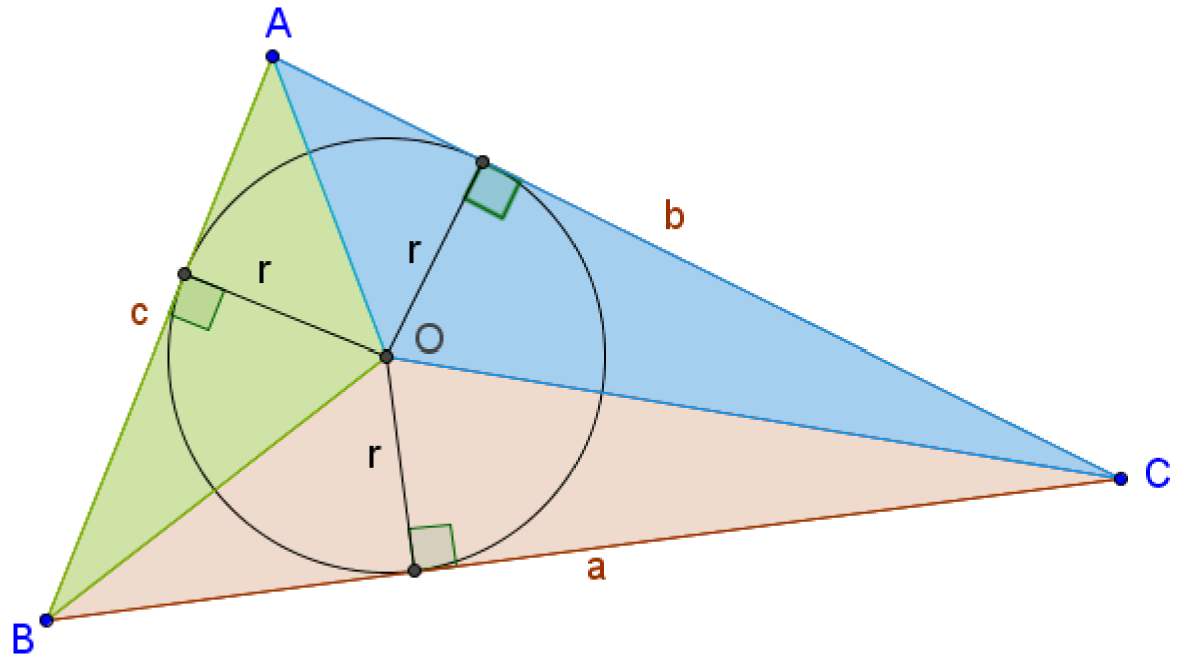
16. В прямоугольном треугольнике ABC вневписанная окружность с центром O_a и радиусом r_a касается катета BC в точке T_a, вневписанная окружность с центром O_b и радиусом r_b касается катета AC в точке T_b.

а) Докажите, что площадь прямоугольного треугольника ABC может быть найдена по формуле $S = r_a r_b$.

б) Найдите площадь четырёхугольника AT_bT_aB, если $S_{ABC} = 30$.



Вывод формулы *S* = *pr*



$$S = S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr =$$

$$= \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c\right)r = pr$$

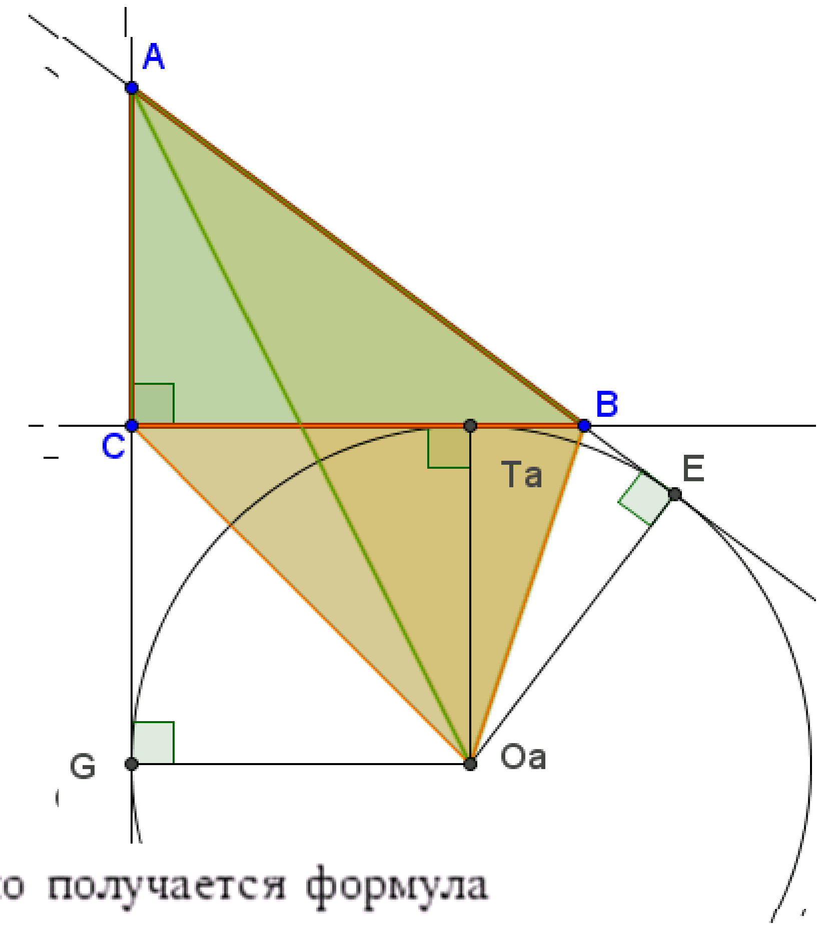
Решение

16. а) Обозначим $AB = c$, $AC = b$, $CB = a$, p — полупериметр $\triangle ABC$. Выполняются следующие равенства (см. рис.):

$$S = S_{ABC} = S_{O_aCA} + S_{O_aBA} - S_{O_aCB} =$$

$$= \frac{1}{2}O_aG \cdot AC + \frac{1}{2}O_aE \cdot AB - \frac{1}{2}O_aT_a \cdot BC =$$

$$= \frac{1}{2}r_ab + \frac{1}{2}r_ac - \frac{1}{2}r_aa = \frac{r_a}{2}(c + b - a).$$



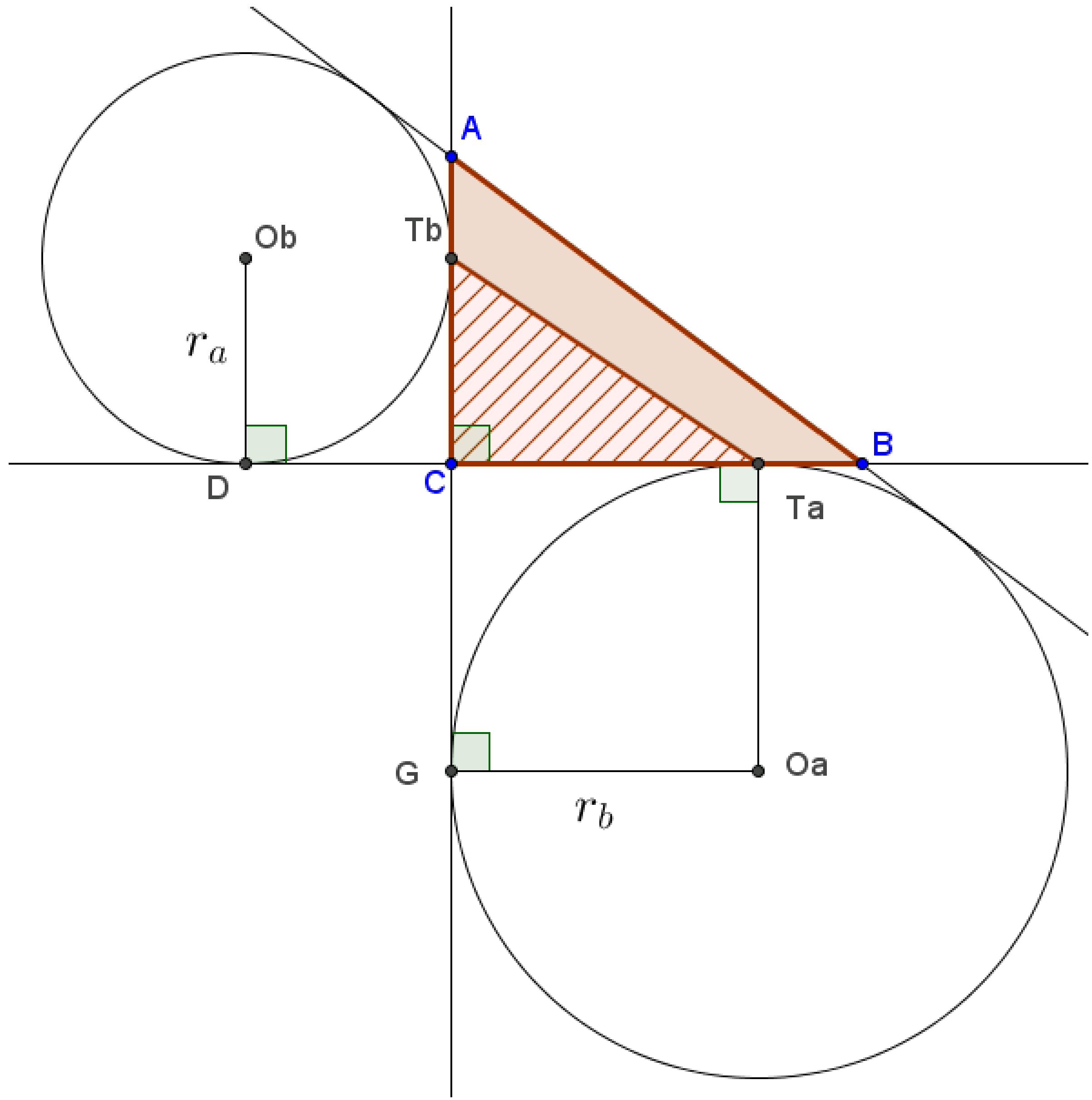
Отсюда получаем $r_a = \dfrac{2S}{c+b-a}$. Аналогично получается формула $r_b = \dfrac{2S}{c+a-b}$.

Используя формулы $r_a = \dfrac{2S}{c+b-a}$, $r_b = \dfrac{2S}{c+a-b}$, $c^2 = a^2 + b^2$ и $S = \dfrac{ab}{2}$, получаем:

$$r_a r_b = \frac{4S^2}{(b+c-a)(a+c-b)} = \frac{4S^2}{c^2-(b-a)^2} = \frac{4S^2}{2ab} = \frac{2S^2}{2S} = S,$$ то есть $S = r_a r_b$.

б) Так как $S_{ABC} = r_a r_b$ и площадь прямоугольного треугольника T_aCT_b равна $\frac{1}{2} \cdot CT_a \cdot CT_b = \frac{1}{2} \cdot r_a r_b = 15$, то искомая площадь равна $30 - 15 = 15$.

Ответ: 15.



Задача 2

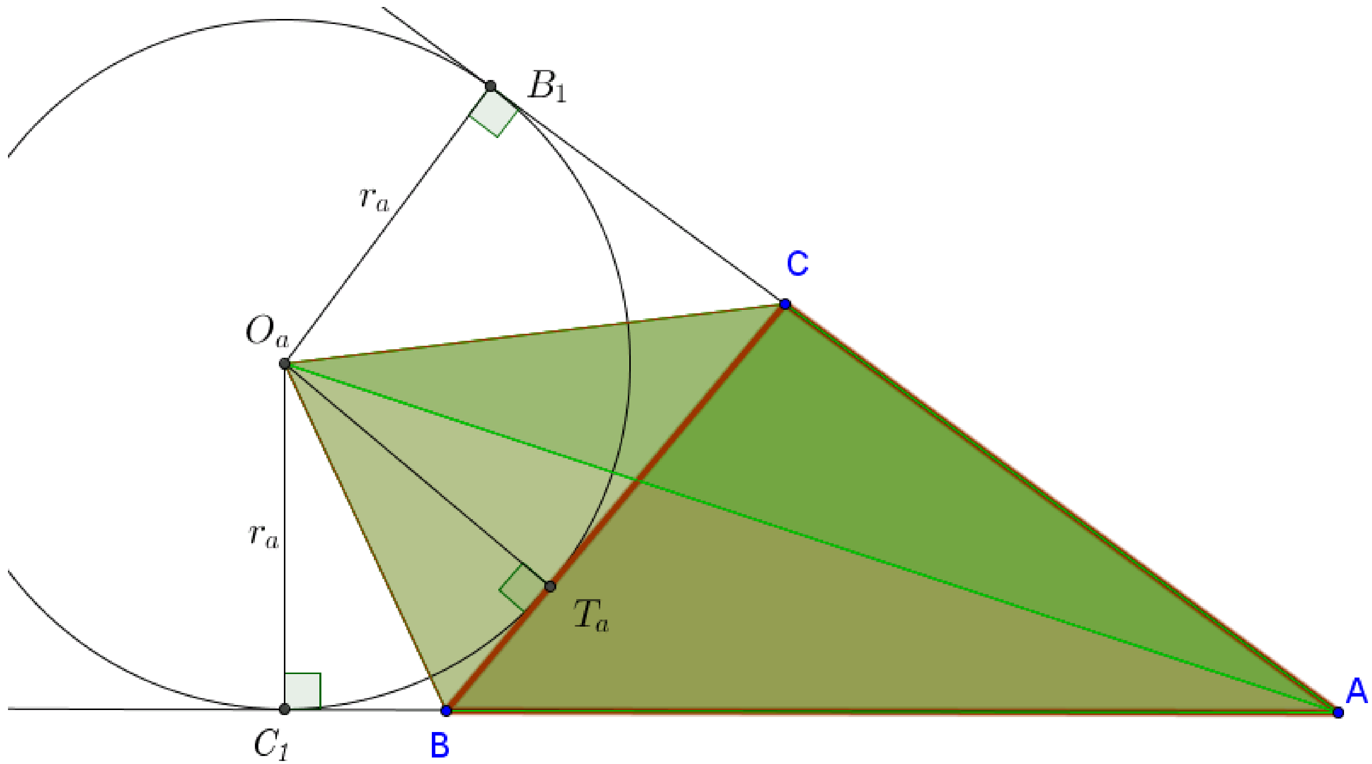
16. Дан треугольник ABC.

а) Докажите, что радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC, вычисляется по формуле $r_a = \dfrac{S}{p - BC}$, где S — площадь $\triangle ABC$, p — его полупериметр.

б) Найдите радиус вневписанной окружности, касающейся основания равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 25, а радиус вписанной в треугольник окружности равен 12.

Решение

16. а) Выполняются следующие равенства (см. рис.):



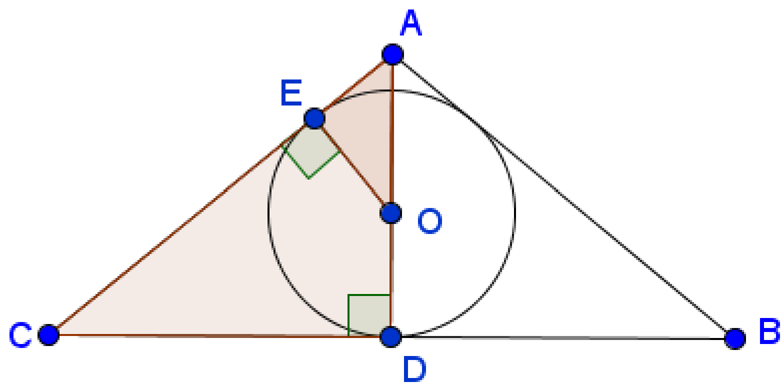
$$S_{ABC}=S_{O_aCA}+S_{O_aBA}-S_{O_aCB}=\frac{1}{2}O_aB_1\cdot AC+\frac{1}{2}O_aC_1\cdot AB-\frac{1}{2}O_aT_a\cdot BC=$$

$$=\frac{1}{2}r_aAC+\frac{1}{2}r_aAB-\frac{1}{2}r_aBC=r_a(p-BC).$$

Отсюда получаем $r_a=\dfrac{S}{p-BC}$.

Решение

б) Пусть AD — высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная на основание BC, O — центр вписанной окружности, E — точка ее касания с боковой стороной AC (см. рис.). Тогда AD является биссектрисой и высотой и O принадлежит AD, OD — радиус вписанной окружности. Тогда $AO = 25 - 12 = 13$.



Треугольник AOE прямоугольный, $AE = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Треугольники AOE и ACD подобны по двум углам, поэтому $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{OE}{CD} = \dfrac{AE}{AD}$ или $\dfrac{13}{AC} = \dfrac{12}{CD} = \dfrac{5}{25}$. Отсюда $CD = 60$ и $AC = 65$, значит, $BC = 120$.

Площадь треугольника $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 120 \cdot 25 = 1\,500$.

Так как полупериметр треугольника ABC равен $p = AC + CD = 65 + 60 = 125$, то радиус вневписанной окружности, касающейся основания BC, равен $\dfrac{S}{p - BC} = \dfrac{1\,500}{125 - 120} = 300$.

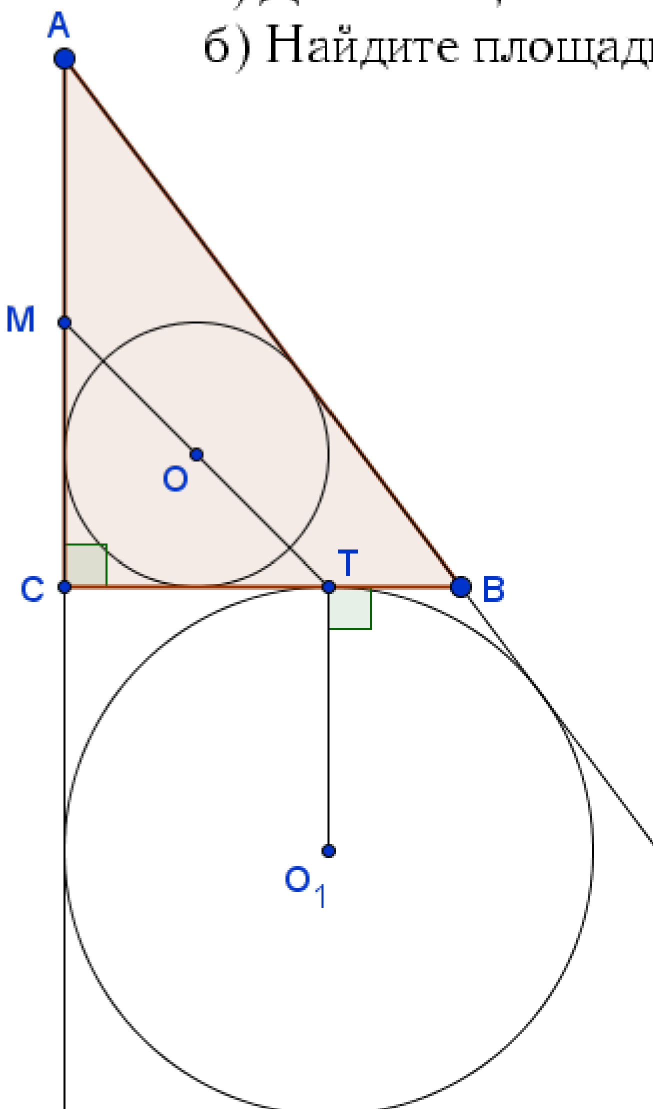
Ответ: 300.

Задача 3

16. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. O — центр вписанной окружности, T — точка касания вневписанной окружности катета BC, M — точка пересечения прямой TO и другого катета AC.

а) Докажите, что $AM = MC$.

б) Найдите площадь треугольника TMC, если $AC = 4$, $BC = 3$.



Решение

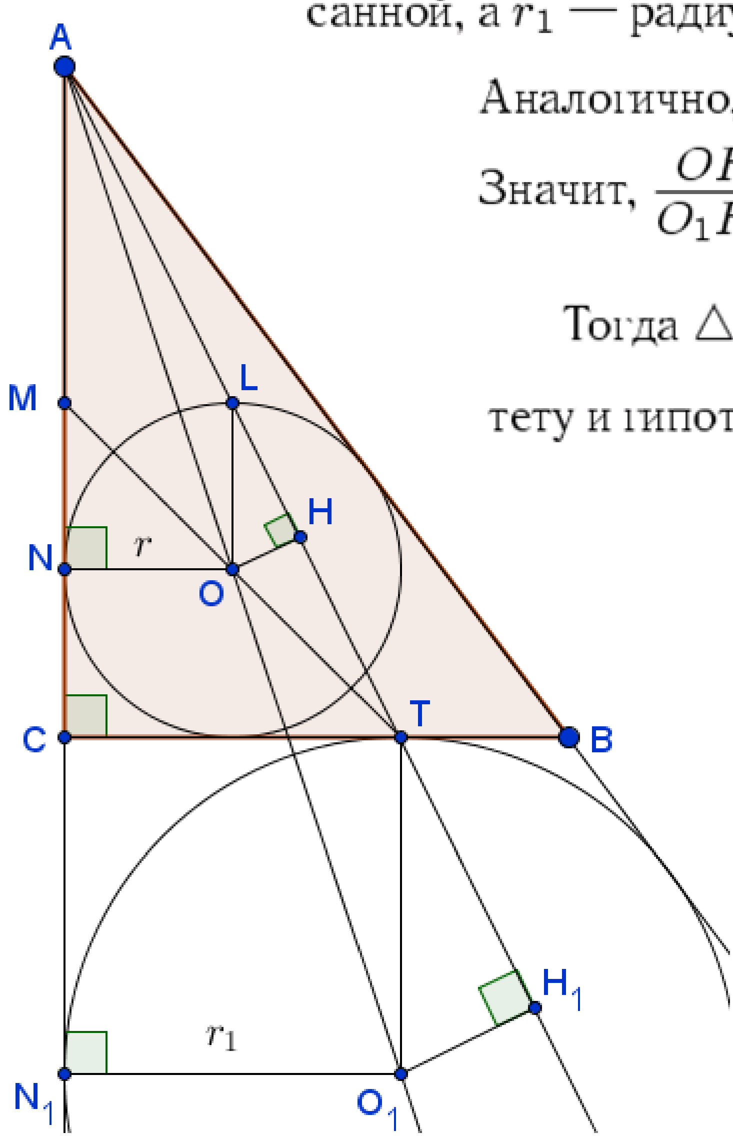
16. а) Пусть L — точка пересечения прямой AT и вписанной окружности (см. рис.).

$\triangle AON \sim \triangle AO_1N_1$ (оба прямоугольных треугольника имеют общий угол при вершине A). Значит, $\dfrac{AO}{AO_1} = \dfrac{ON}{O_1N_1} = \dfrac{r}{r_1}$, где r — радиус вписанной, а r_1 — радиус вневписанной окружностей.

Аналогично, $\triangle AOH \sim \triangle AO_1H_1$.

Значит, $\dfrac{OH}{O_1H_1} = \dfrac{AO}{AO_1} = \dfrac{r}{r_1}$.

Тогда $\triangle LHO \sim \triangle TH_1O_1$ по соответственно пропорциональным катету и гипотенузе, так как $\dfrac{OH}{O_1H_1} = \dfrac{r}{r_1} = \dfrac{LO}{TO_1}$.

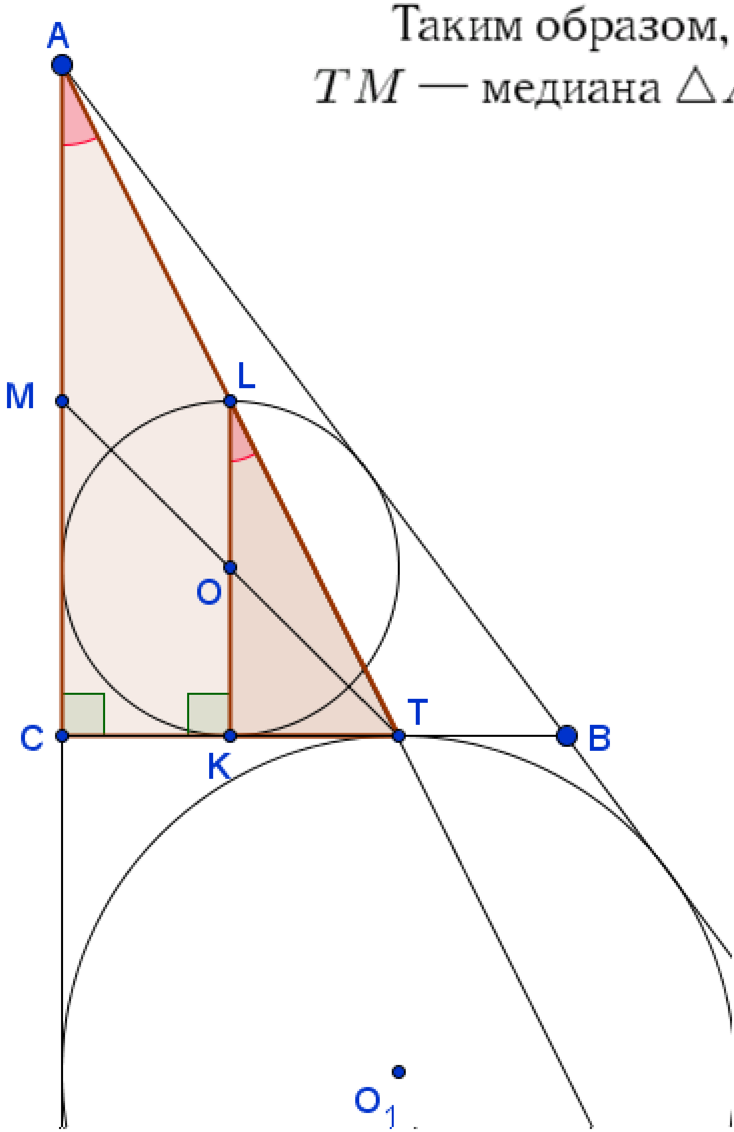


Решение

Следовательно, $\angle OLH = \angle O_1TH_1$. Отсюда, $LO \parallel TO_1$, так как равны соответственные углы между LO, TO_1 и секущей AT. Но $TO_1 \perp BC$ поэтому $LO \perp BC$.

Так как и $OK \perp BC$, то LK — диаметр вписанной окружности и $LK \parallel AC$.

Таким образом, $\triangle LKT \sim \triangle ACT$. Но TO — медиана $\triangle LKT$. Значит, TM — медиана $\triangle ACT$, то есть $AM = MC$.



Решение

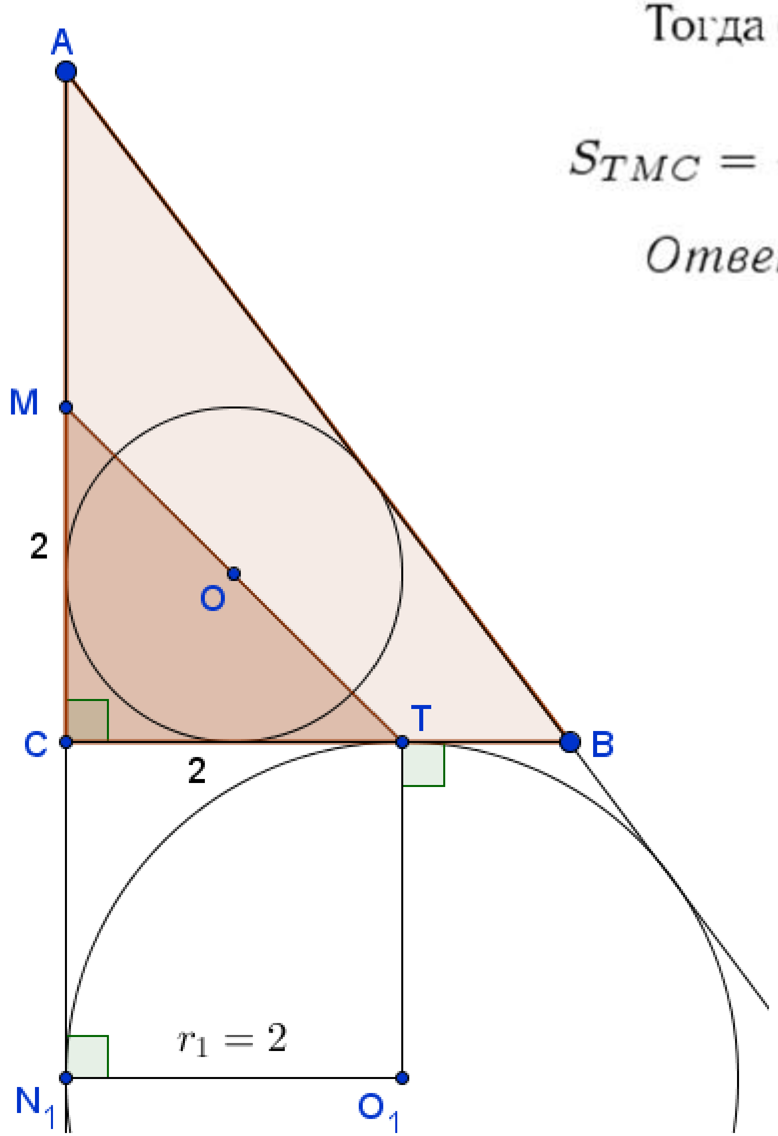
б) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6;$

$$p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2} + 3 + 4}{2} = \frac{5 + 3 + 4}{2} = 6.$$

Тогда $CT = r_1 = \frac{S_{ABC}}{p - BC} = \frac{6}{6 - 3} = 2;$

$$S_{TMC} = \frac{1}{2} \cdot MC \cdot CT = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot CT = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2.$$

Ответ: 2.

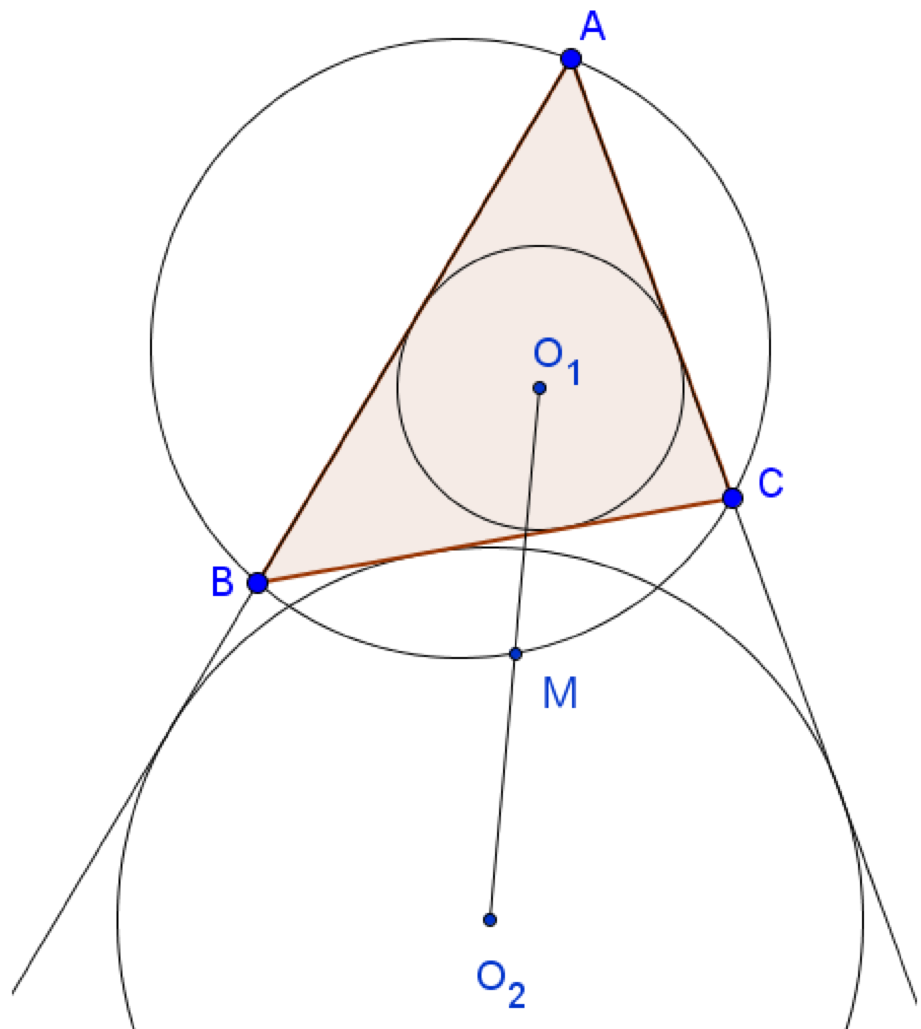


Задача 4

16. Пусть O_1 — центр вписанной окружности треугольника ABC, O_2 — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BC.

а) Докажите, что $O_1M = MO_2$, где M — точка пересечения отрезка O_1O_2 и описанной окружности треугольника ABC.

б) Найдите O_1O_2, если $BM = 5$.

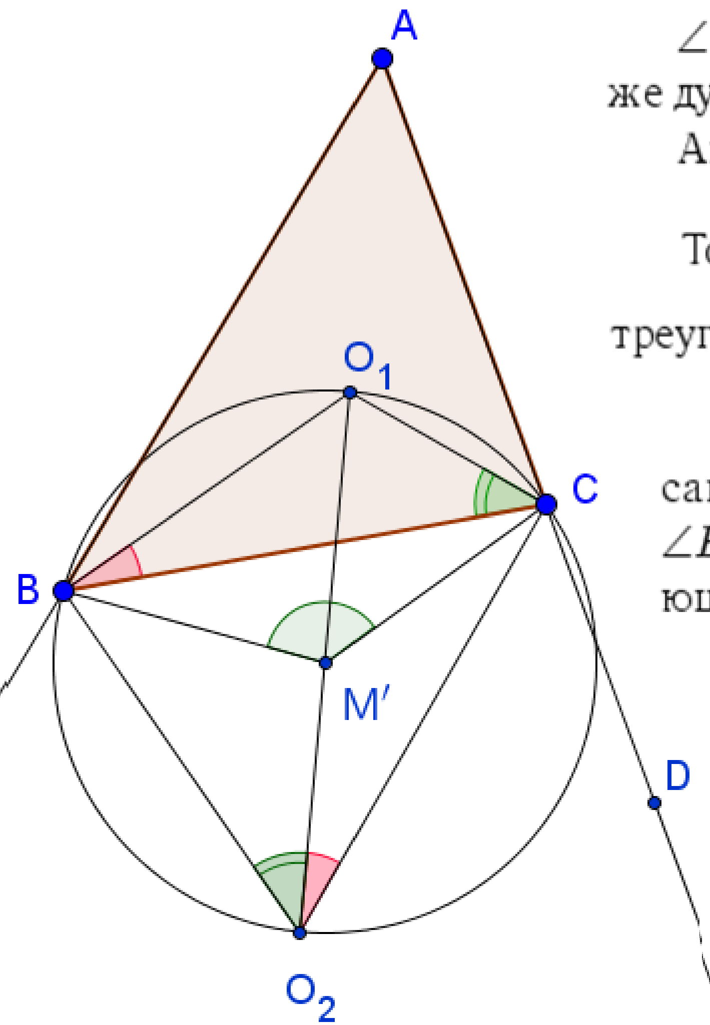


Решение

а) Так как O_1C — биссектриса $\angle ACB$, а O_2C — биссектриса $\angle BCD$, то $\angle O_1CO_2 = \angle O_1CB + \angle BCO_2 = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle BCD) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$ (см. рис.).

Аналогично, $\angle O_1BO_2 = 90^\circ$.

Следовательно, точки O_1, C, O_2 и B лежат на одной окружности диаметром O_1O_2.



$\angle O_1BC = \angle O_1O_2C$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.

Аналогично, $\angle O_1CB = \angle O_1O_2B$.

Тогда $\angle BO_2C = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ (по свойству суммы углов треугольника ABC).

Пусть M' — середина отрезка O_1O_2, то есть центр окружности, описанной вокруг O_1CO_2B (M' — середина гипотенузы $\triangle O_1BO_2$). Тогда $\angle BM'C = 2\angle BO_2C = 180^\circ - \angle A$ ($\angle BM'C$ — центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный $\angle BO_2C$).

Решение

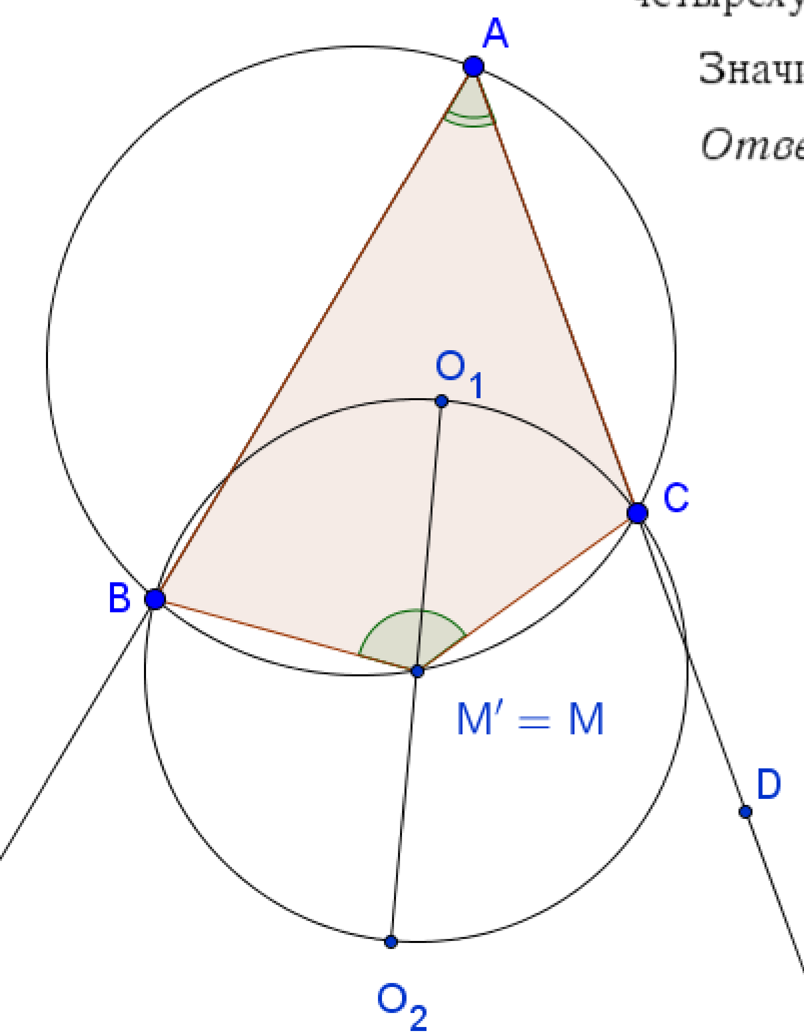
В четырёхугольнике $ABM'C$ сумма противоположных углов $\angle BAC + \angle BM'C = \angle A + 180^\circ - \angle A = 180^\circ$.

Значит, точки A, B, C и M' лежат на одной окружности и это описанная окружность $\triangle ABC$. Следовательно, точка M' совпадает с точкой M и $O_1M = MO_2$.

б) Из пункта а) следует, что BM — радиус описанной окружности четырёхугольника O_1CO_2B, а O_1O_2 — её диаметр.

Значит, $O_1O_2 = 2BM = 2 \cdot 5 = 10$.

Ответ: 10.



Литература


А.А. Прокофьев, А.Г. Корянов
ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
РЕШЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
ЗАДАНИЕ 16
500 ТРЕНИРОВОЧНЫХ ЗАДАНИЙ
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ЗАДАЧАМ
ЛЕГИОН


Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова
ОГЭ-2020
ГЕОМЕТРИЯ
ЗАДАЧИ ОГЭ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ
ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ И ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ
ОТВЕТЫ, КОММЕНТАРИИ И ПОШАГОВЫЕ РЕШЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ
ЛЕГИОН


МАСТЕР-КЛАСС
GeoGebra
С.В. Ларин
КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ
в среде GeoGebra
на уроках математики
ЛЕГИОН

Книги можно заказать в нашем интернет-магазине на сайте **www.legionr.ru**

Спрашивайте
в книжных магазинах города!

Издательство регулярно проводит вебинары для педагогов.

По завершении каждого вебинара участники получают электронные сертификаты.

Ссылки для участия вы сможете найти на сайте издательства www.legionr.ru

Все вебинары издательства «Легион» носят обучающий характер

legionrus@legionrus.com

Вступайте в группу

«Издательство «Легион»

в социальных сетях:

В Контакте

одноклассники

f acebook

Видео вебинаров смотрите на YouTube.

Адрес для корреспонденции:

344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550