



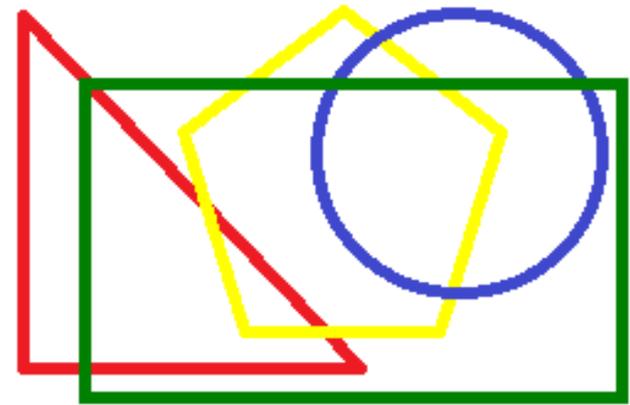
Для нормального развития ребенку необходимо полноценное питание.

Для нормального интеллектуального развития необходима разнообразная интеллектуальная пища.

Сегодня математика, особенно геометрия, является одним из немногих экологически чистых и полноценных продуктов, потребляемых в системе образования.

Шарыгин И.Ф.

Противоречие



Значимость задач на построение с точки зрения их содержания и особенностей процесса решения:

- ✓ *способствуют развитию логического и пространственного мышления,*
 - ✓ *графической культуры,*
 - ✓ *навыков поисковой и исследовательской деятельности,*
 - ✓ *геометрической интуиции*
- и пр.*

Эпизодичность их изучения в современном школьном курсе геометрии.



Издательство «Легион»

Построение сечений многогранников

Фридман Е. М.

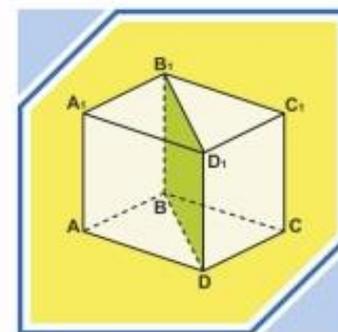
Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

- ЗАДАНИЯ РАЗНОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ
- ПОШАГОВЫЕ РЕШЕНИЯ С ИЛЛЮСТРАЦИЯМИ
- ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ЗАДАНИЯМ



ЛЕГИОН

Учебники по геометрии для 10-11 классов (федеральный перечень)

- **Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. (Геометрия, 10-11);**
- **Погорелов А.В. (Геометрия, 7-11);**
- **Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. (Геометрия, 10-11);**
- **Смирнова И.М. (Геометрия, 10-11);**
- **Шарыгин И.Ф. (Геометрия, 10-11).**

Представление темы «Построение сечений многогранников» в школьных учебниках

Учебник	Количество	
	часов	задач
Л.С. Атанасян	2	8
А.В. Погорелов	3	10

Задание 14 ЕГЭ

- *Построение сечения по заданным условиям*
- *Определение вида сечения*
- *Нахождение площади сечения*
- *Определение угла или расстояния между плоскостью сечения (прямой, лежащей в плоскости сечения) и другой плоскостью (прямой)*
- *Определение отношения объемов фигур, на которые сечение делит многогранник (ребро многогранника и т.д.)*

Вывод очевиден:

- ✓ *времени* на изучение темы «Построение сечений многогранников» в школьном курсе геометрии отведено *мало*,
- ✓ *количества задач*, представленных в учебниках, *недостаточно* для формирования навыков их решения;
- ✓ *задач* уровня задания 14 ЕГЭ *нет*.



1,7% выпускников 2017 г.
успешно выполнили
задание 14 на полный балл

Что нужно знать

- ✓ *Аксиомы и теоремы стереометрии и планиметрии*
- ✓ *Правила изображения (проектирования) пространственных фигур на плоскость*
- ✓ *Основные методы построения сечений многогранников*

Что нужно уметь

Применять знания в процессе решения задачи:

- *Увидеть*, что нужно построить на каждом шаге построения сечения
- *Предложить способ* построения
- *Построить* (точку, линию, плоскость и т.д.)

Veni, vidi, vici (пришел, увидел, победил)



Основные методы построения сечений многогранников

✓ Аксиоматический

- Метод следов
- Метод вспомогательных сечений
(метод внутреннего проектирования)

✓ Комбинированный метод

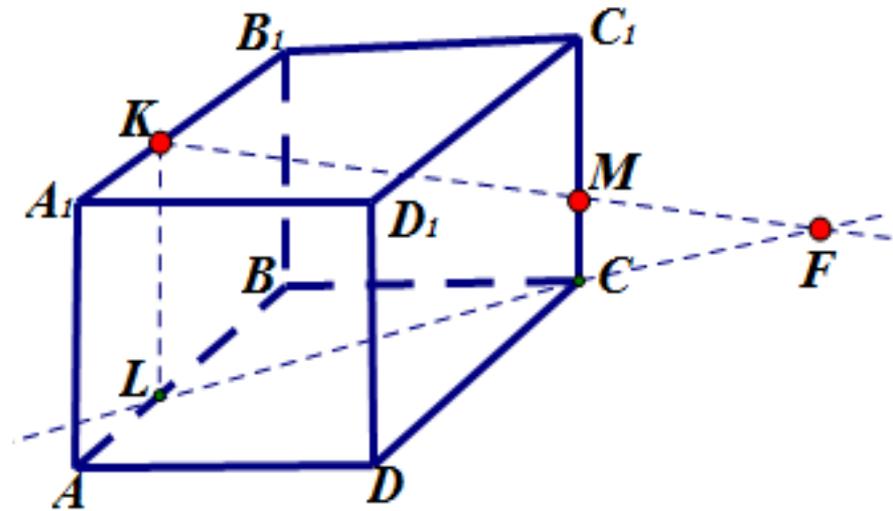
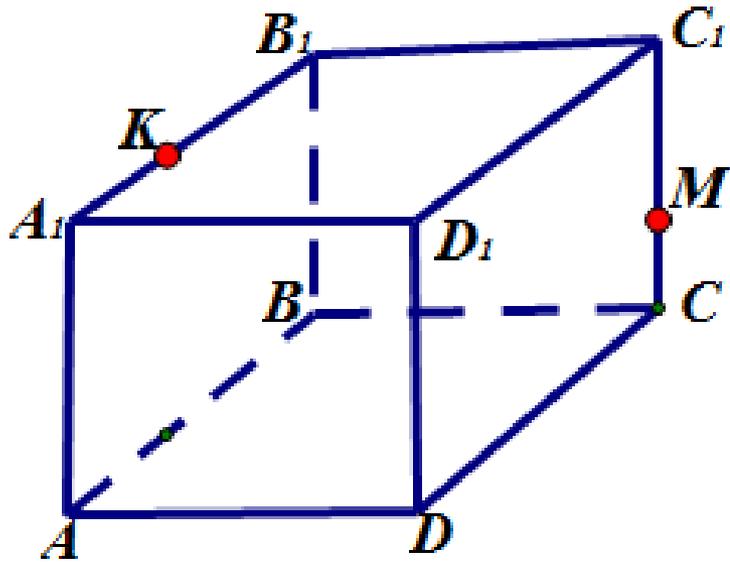
Метод следов



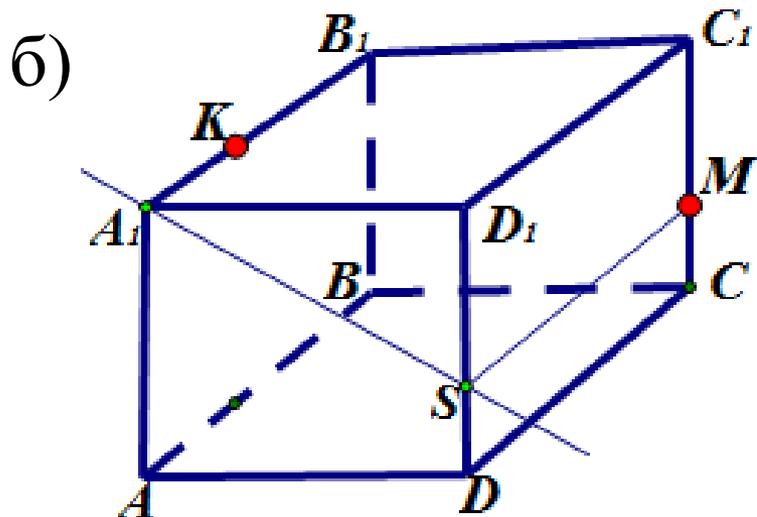
Понятие следа

- *Линия пересечения* плоскости сечения и плоскости грани многогранника называется *следом секущей плоскости на плоскости этой грани многогранника*.
- *Точка пересечения* плоскости сечения и прямой, содержащей ребро многогранника, называется *следом секущей плоскости на прямой, содержащей это ребро многогранника*.

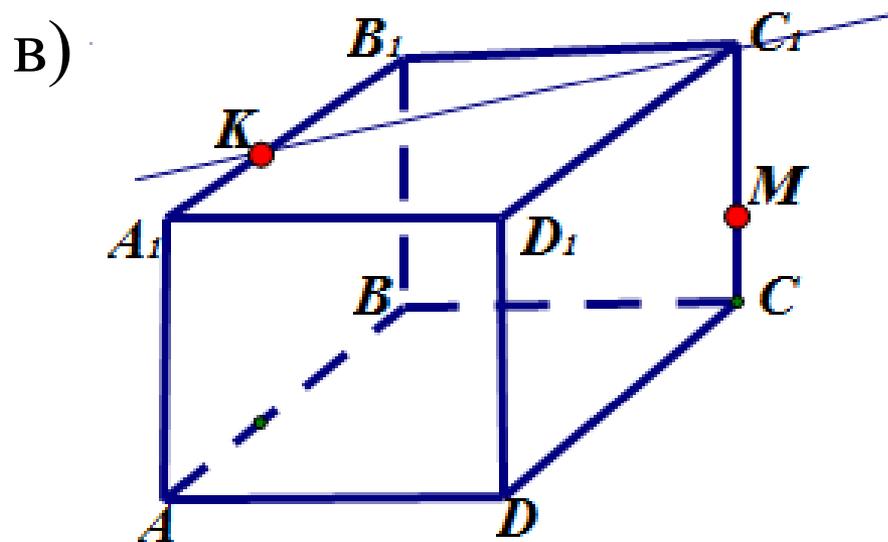
Задача 1. а) Постройте проекцию (след) прямой КМ на плоскость нижнего основания куба ABCDA₁B₁C₁D₁.



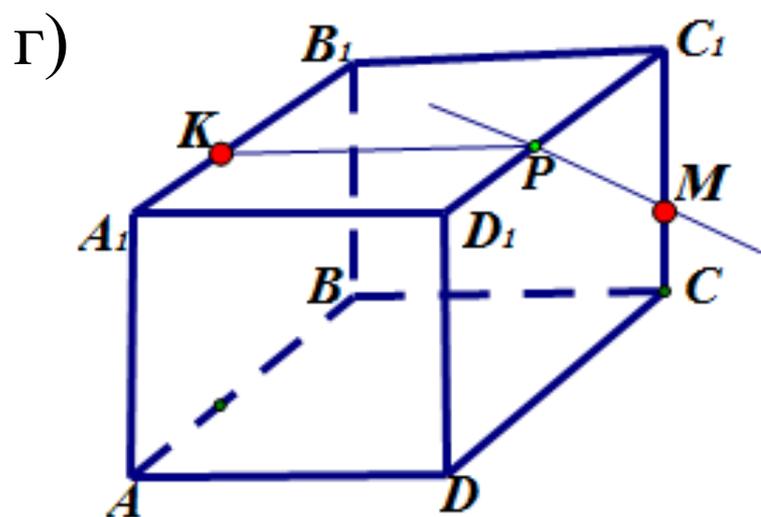
Для призмы при построении сечения выполняем параллельное проектирование (направление проектирования параллельно боковому ребру).



A_1S - проекция KM на
плоскость AA_1D_1D



KC_1 - проекция KM на
плоскость $A_1B_1C_1D_1$

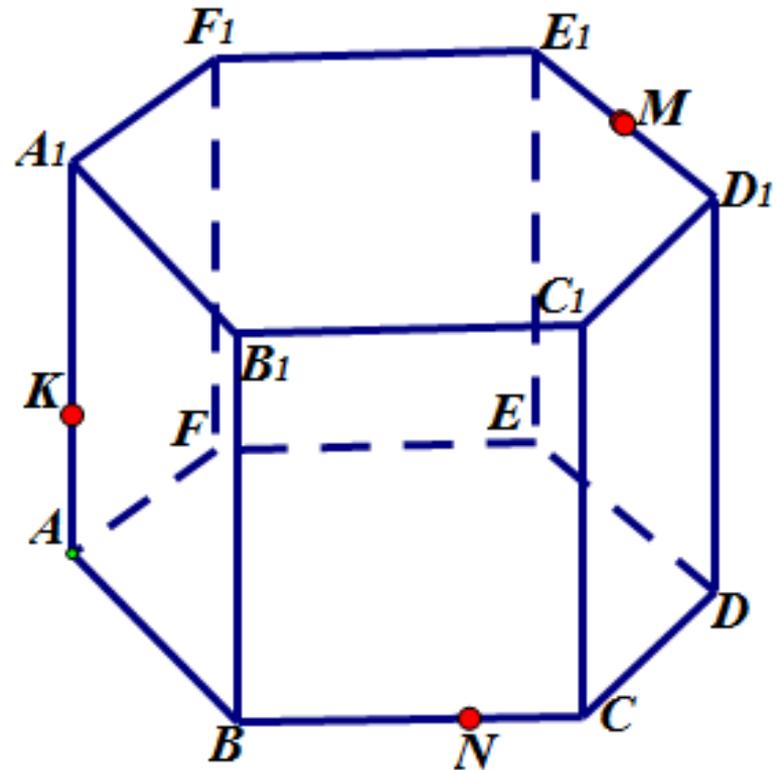


MP - проекция KM на
плоскость CC_1D_1D

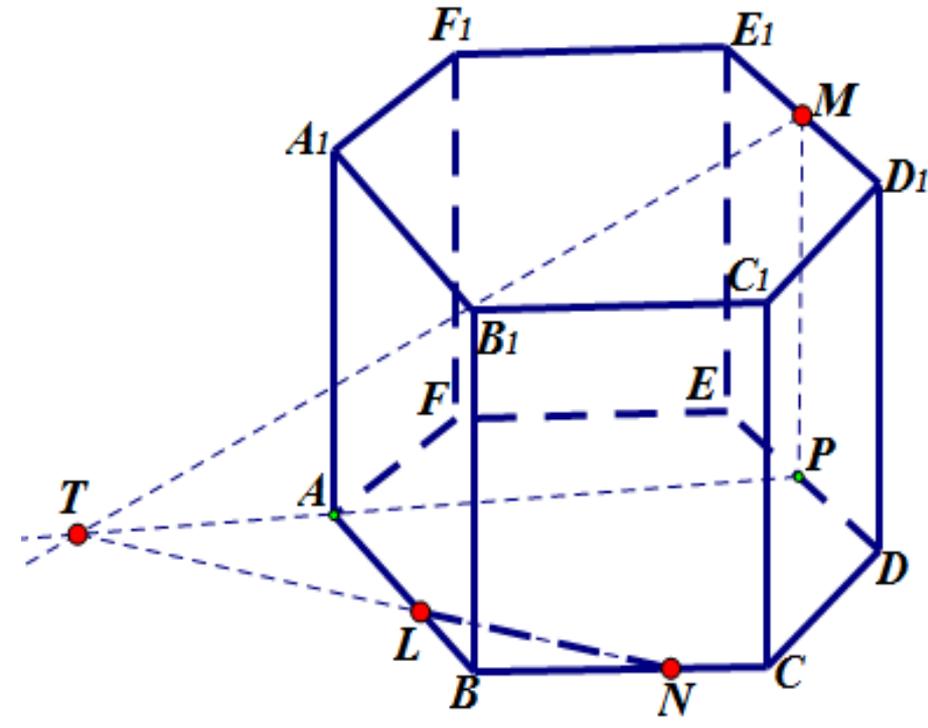
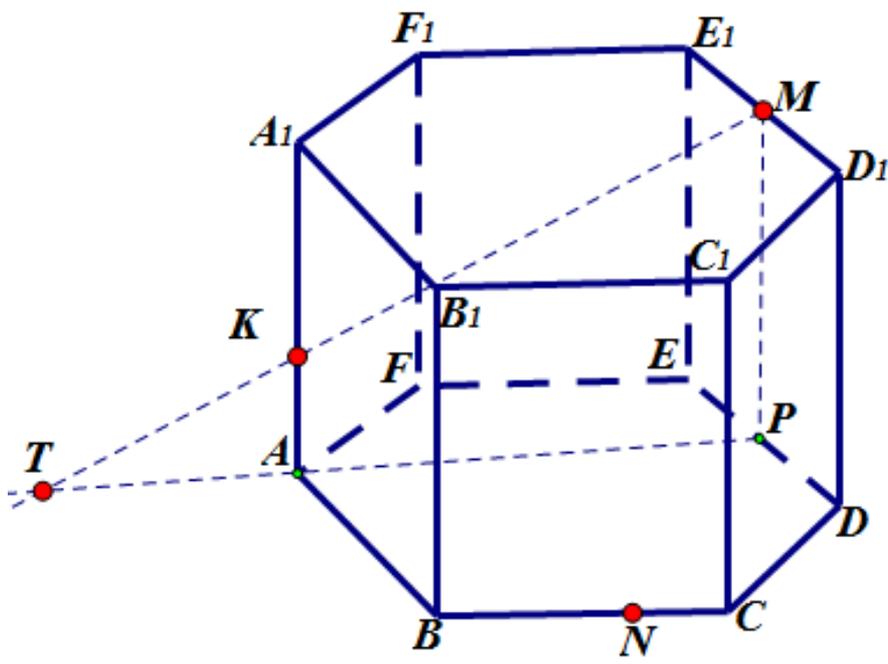
*Можно построить следы KM
на левой боковой и задней
гранях.*

Задача 2. $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ правильная шестиугольная призма. Постройте проекцию (след) плоскости сечения MNK на плоскости:

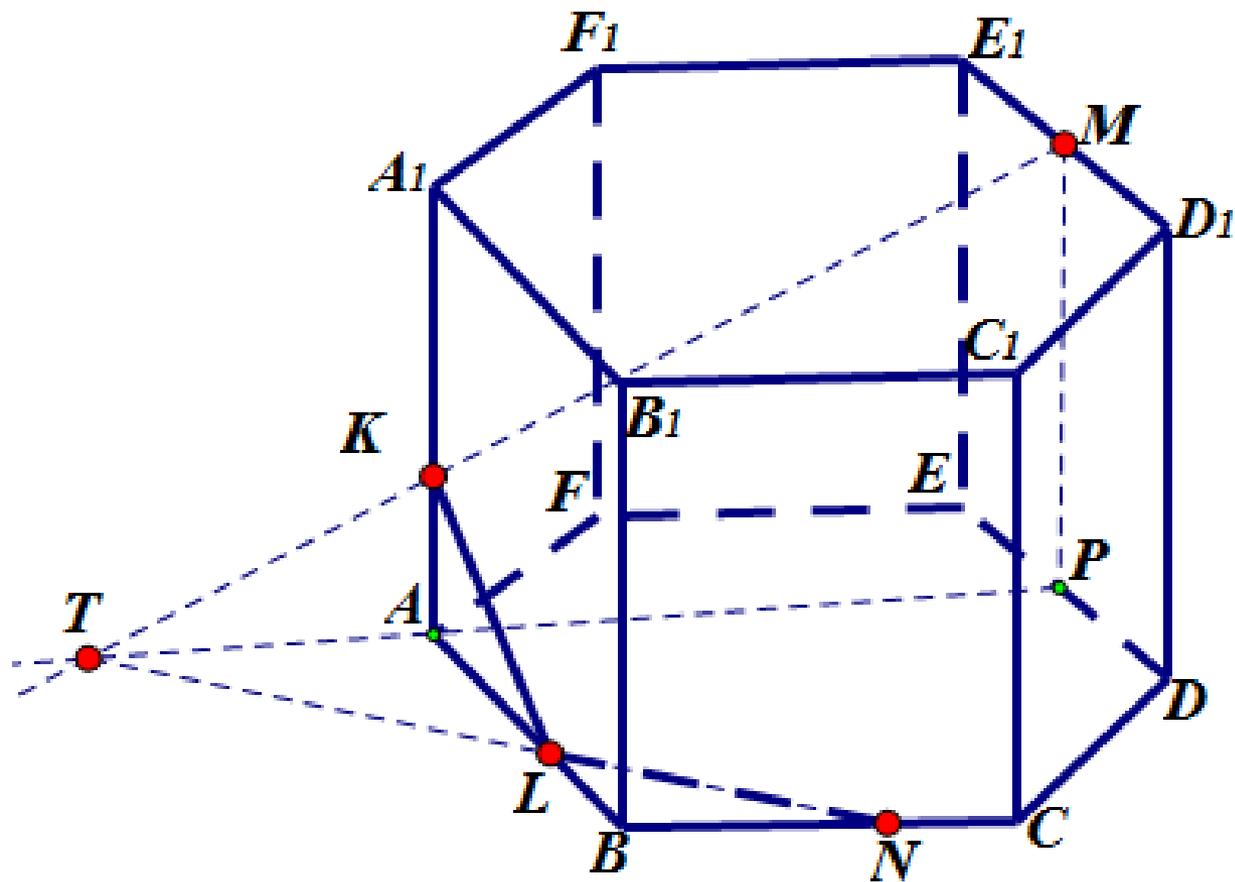
- а) ABC ; б) $AA_1 B_1 B$;
- в) $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$;
- г) $DD_1 E_1 E$;
- д) $CC_1 D_1 D$.



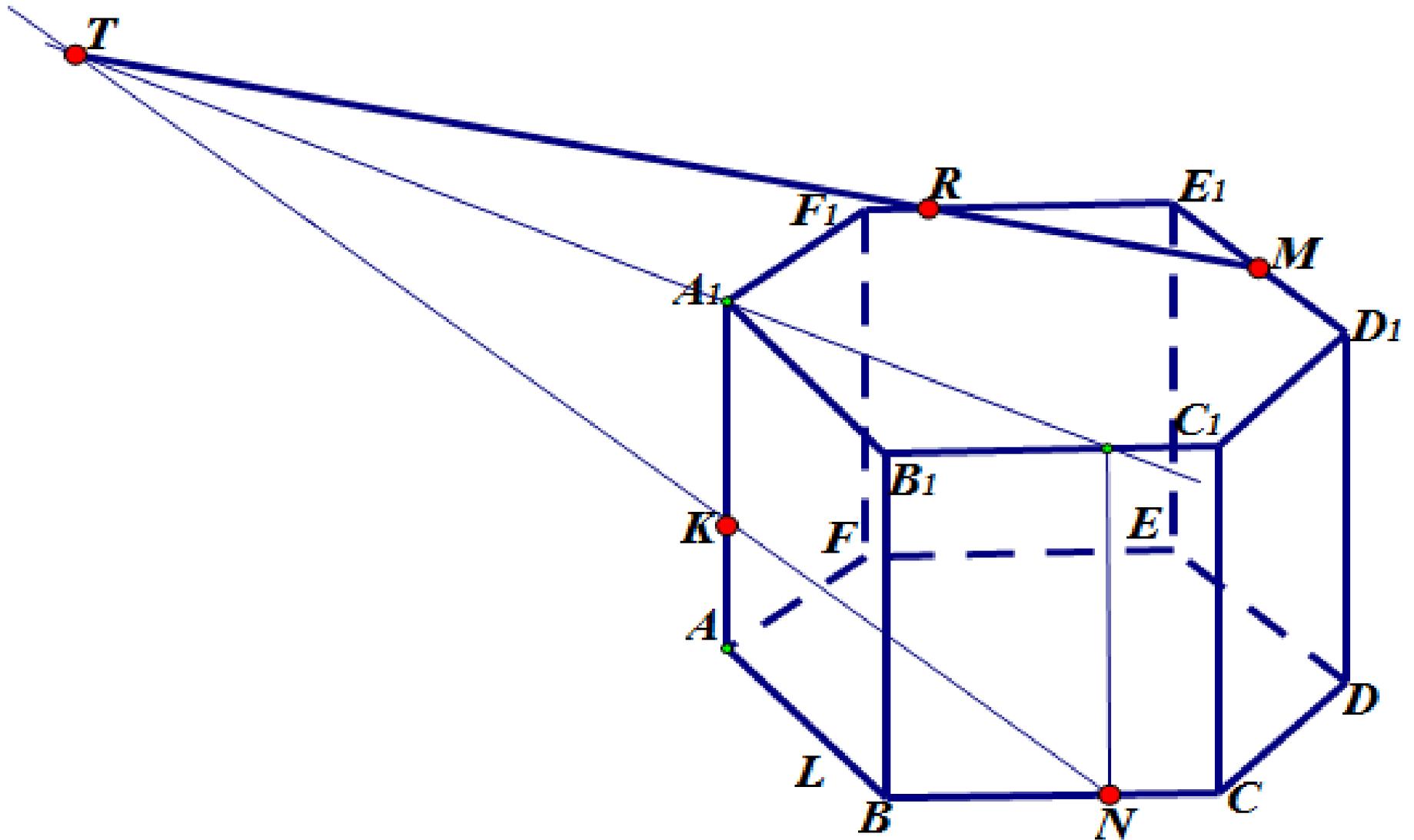
a)



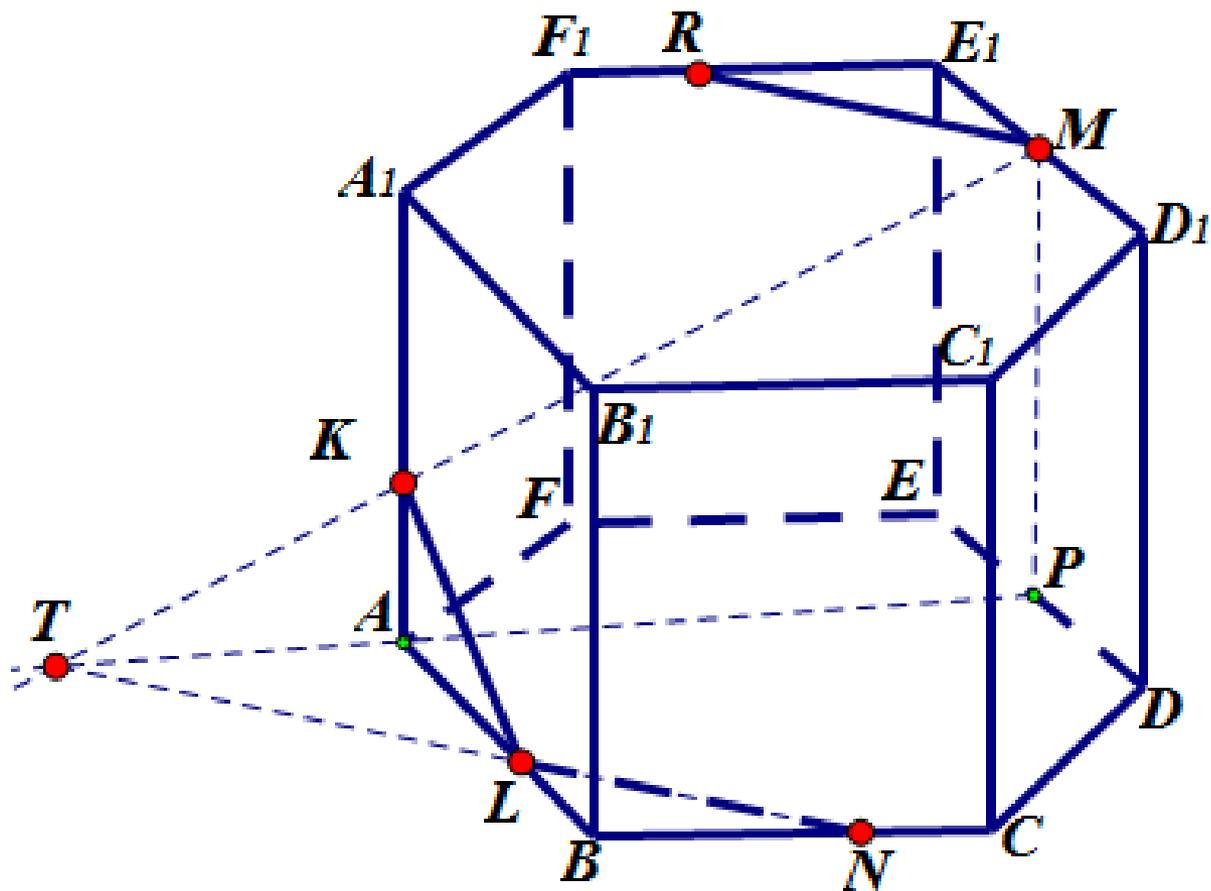
б) AA_1B_1B



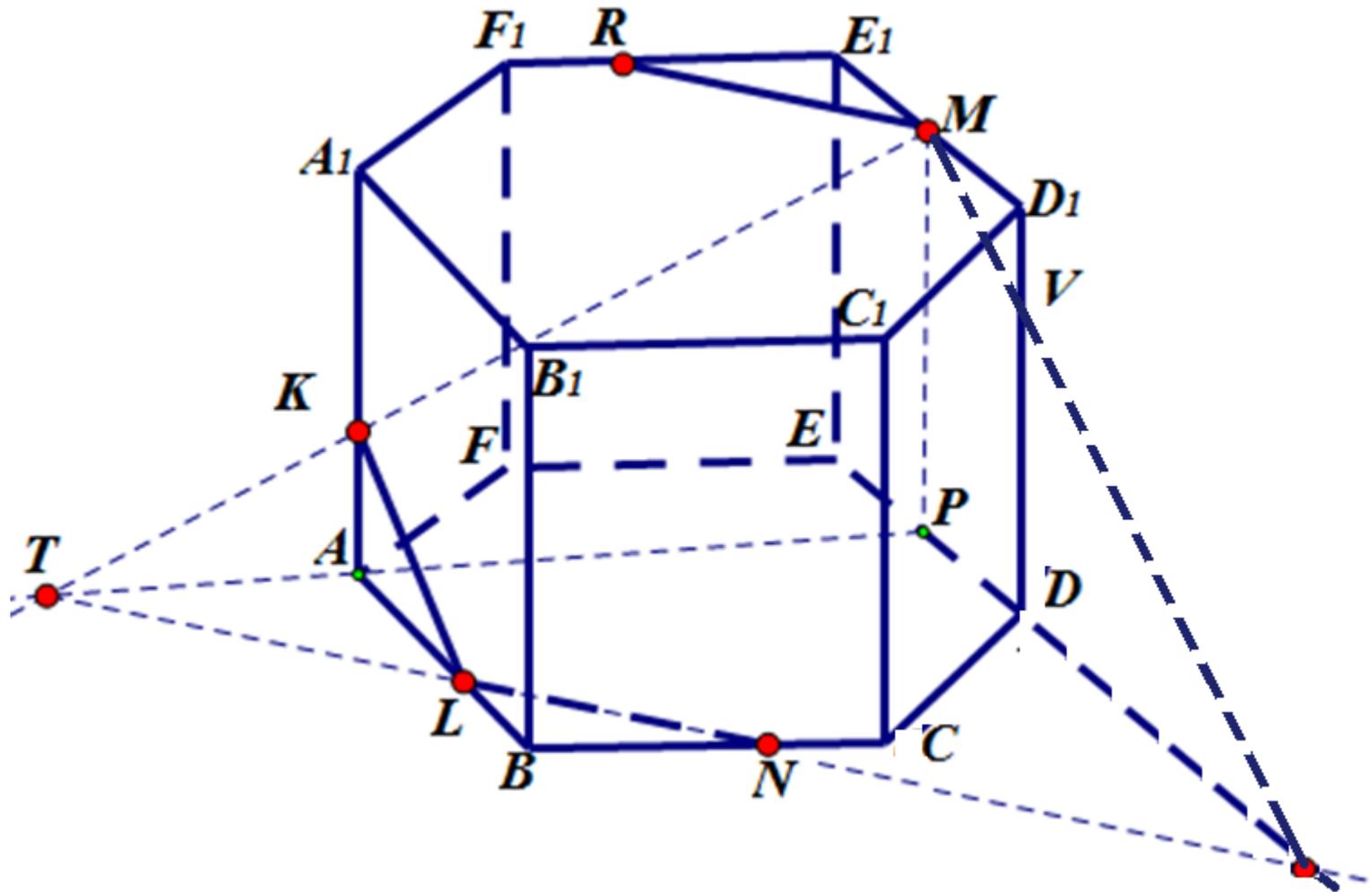
B) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$



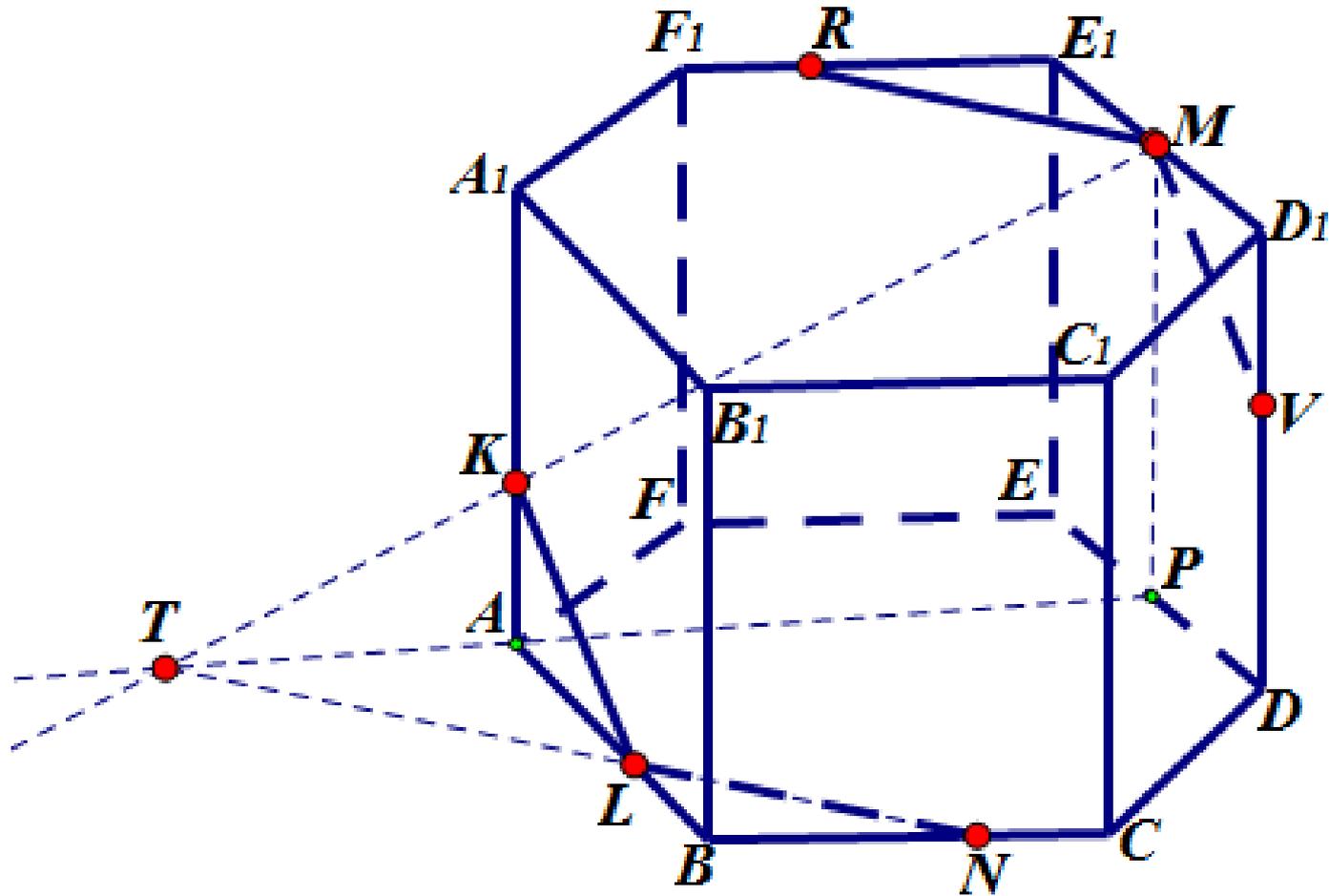
в) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (комбинированный метод)



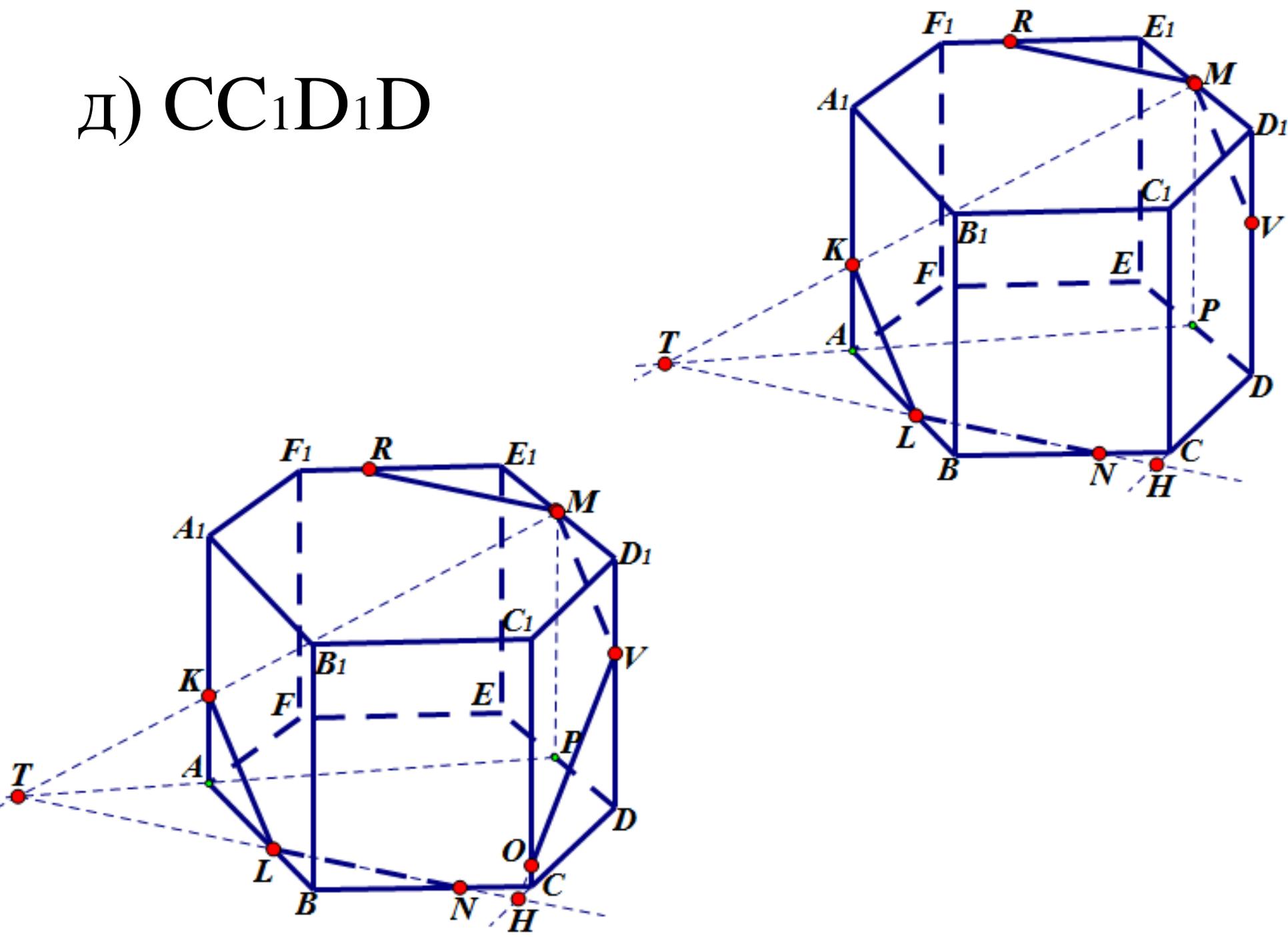
$\Gamma) DD_1E_1E$



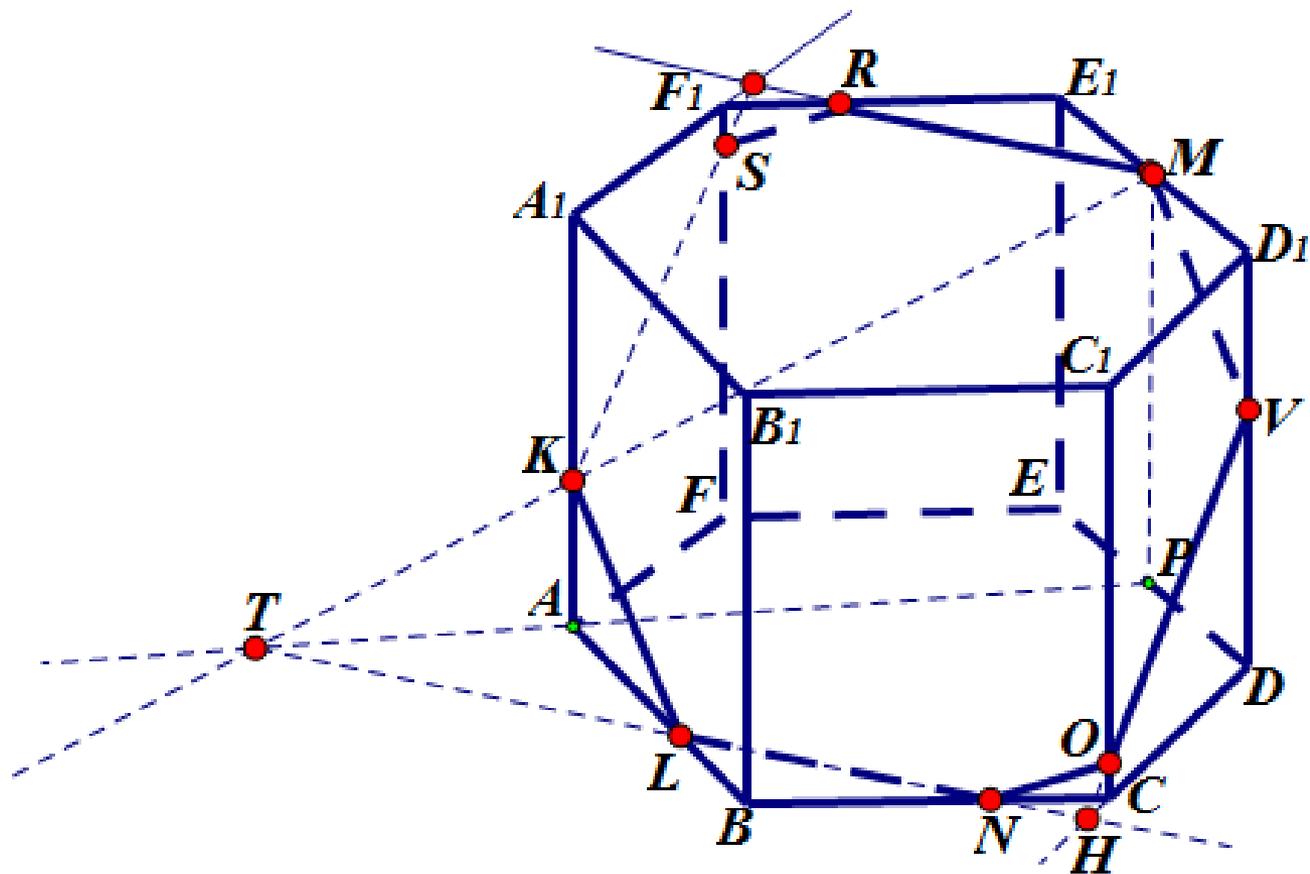
г) DD_1E_1E (комбинированный метод)

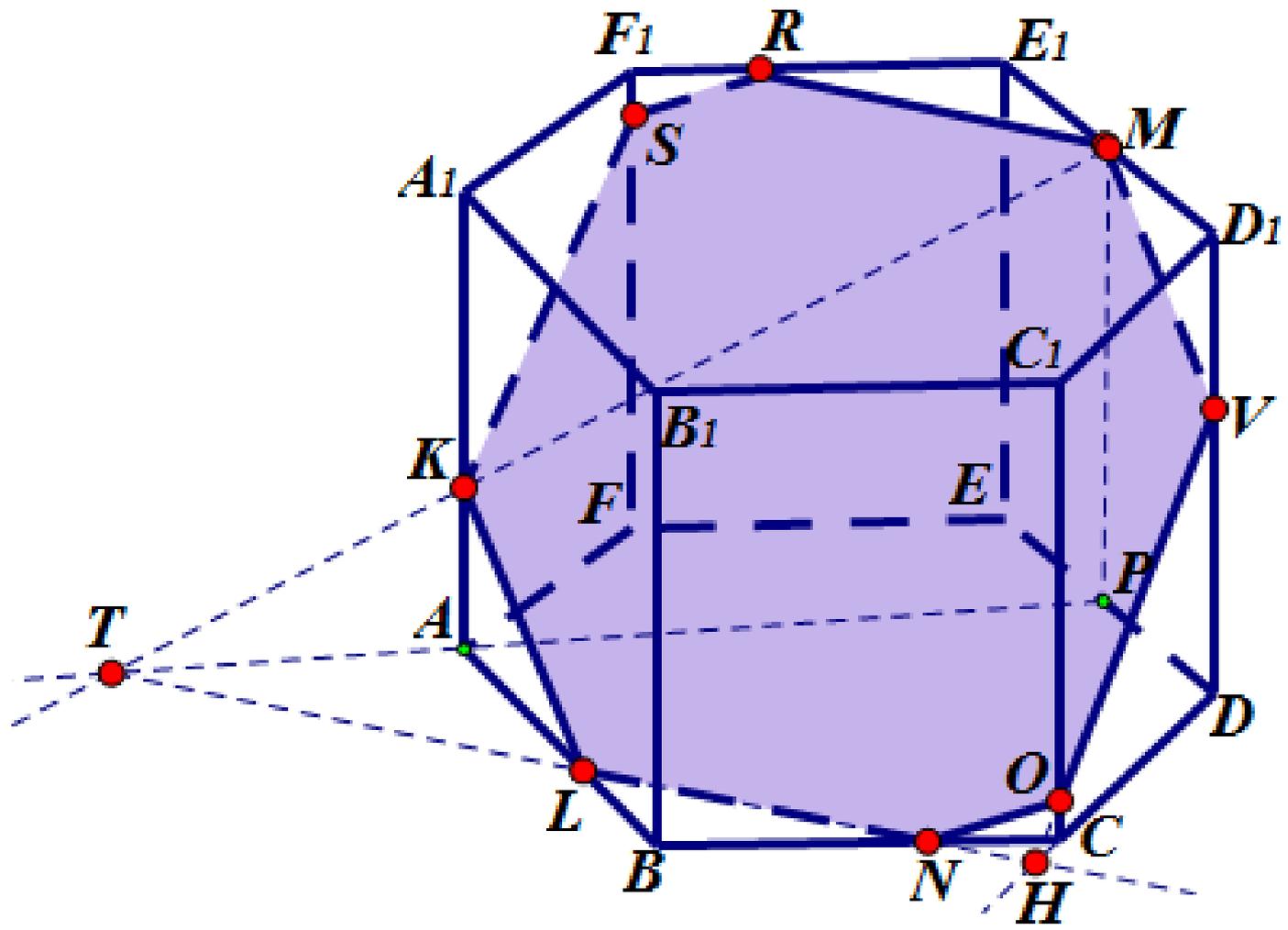


д) CC_1D_1D

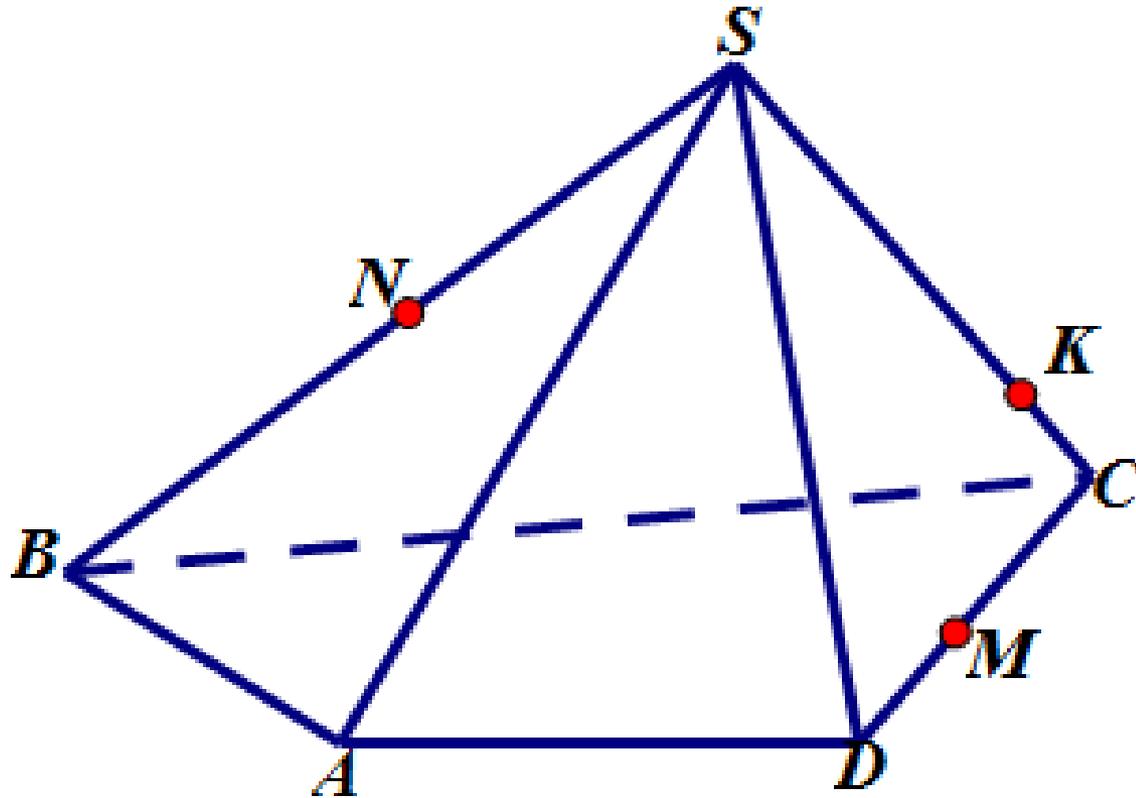


e) AA_1F_1F



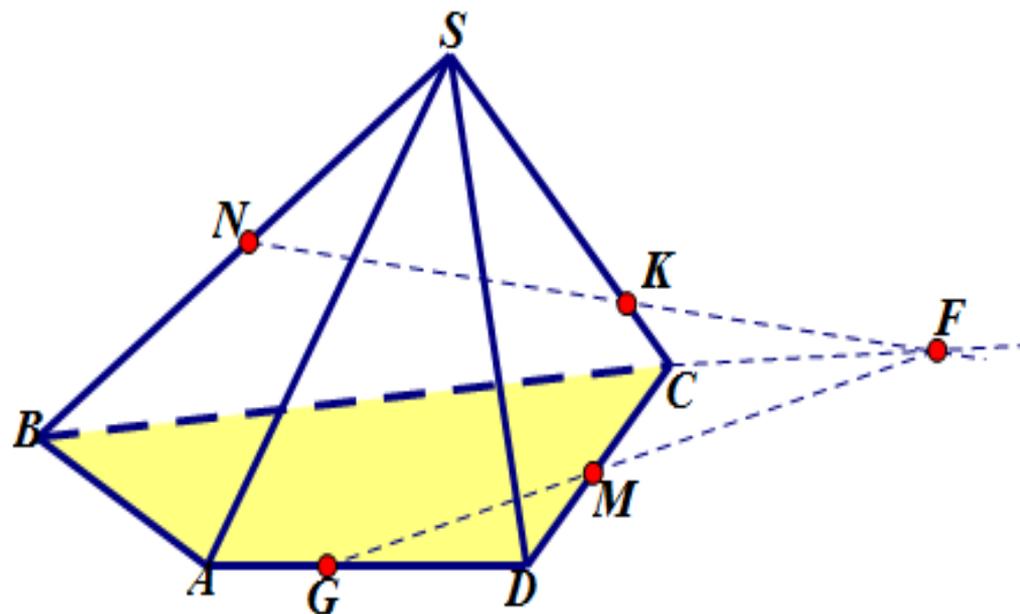
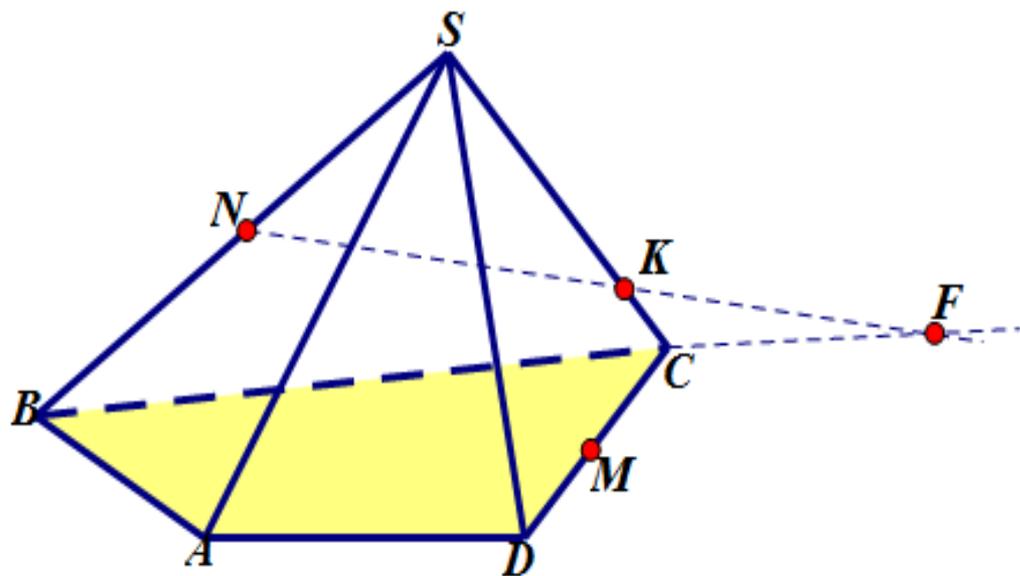


Задача 3. Постройте проекцию (след) плоскости сечения MNK на плоскости:
а) ABC ; б) ABS ; в) ASD .

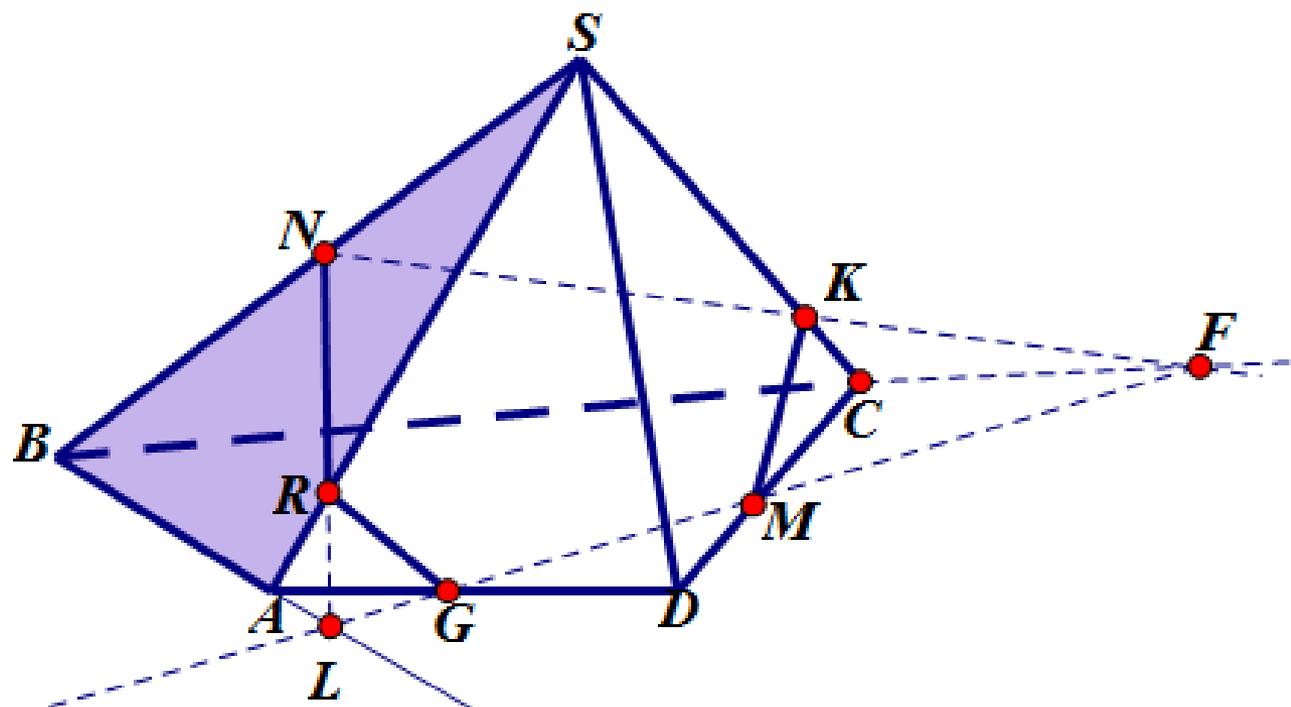


а)

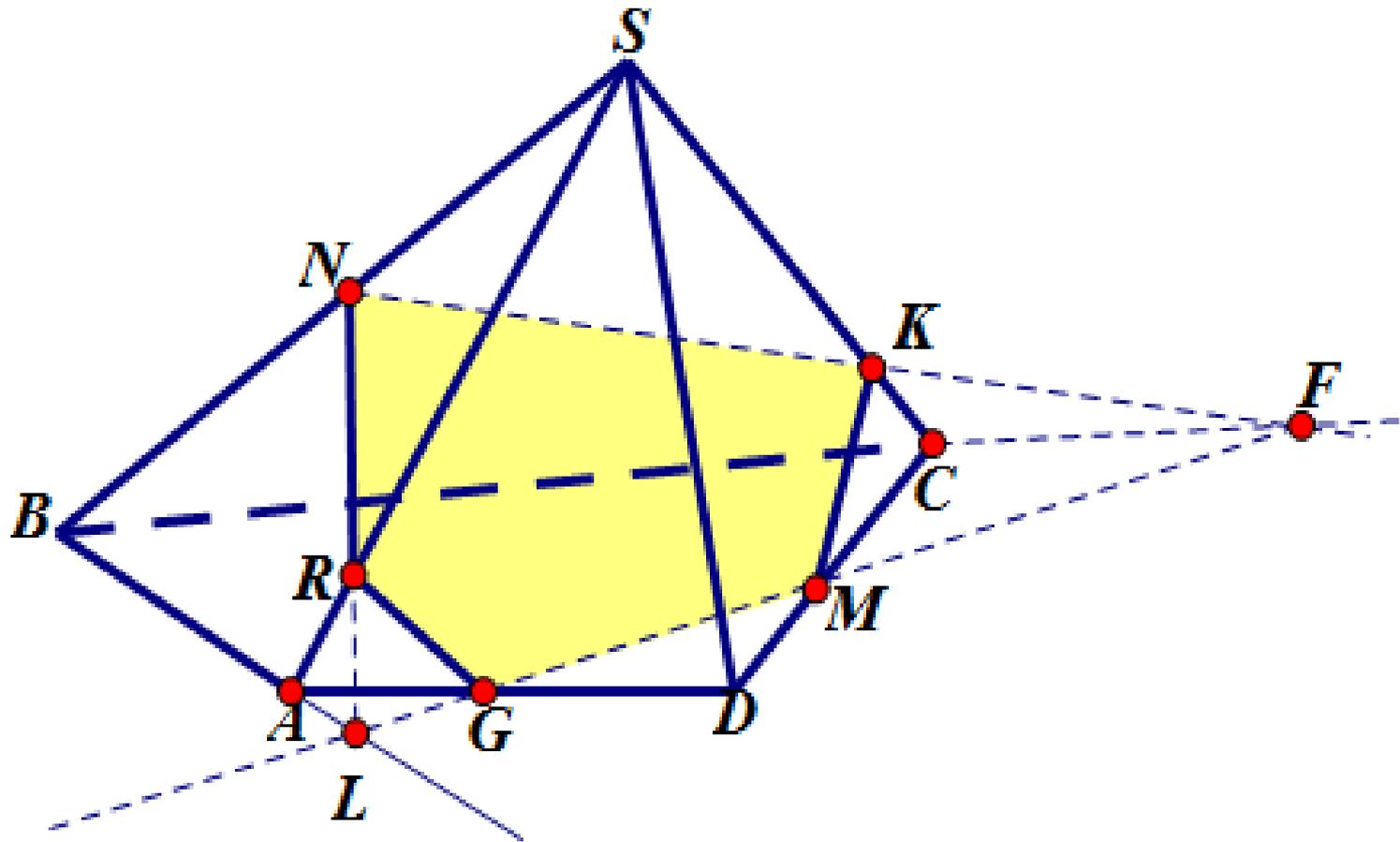
Для пирамиды при построении сечения выполняем *центральное проектирование* с центром в вершине пирамиды.



б) ABS; в) ASD.



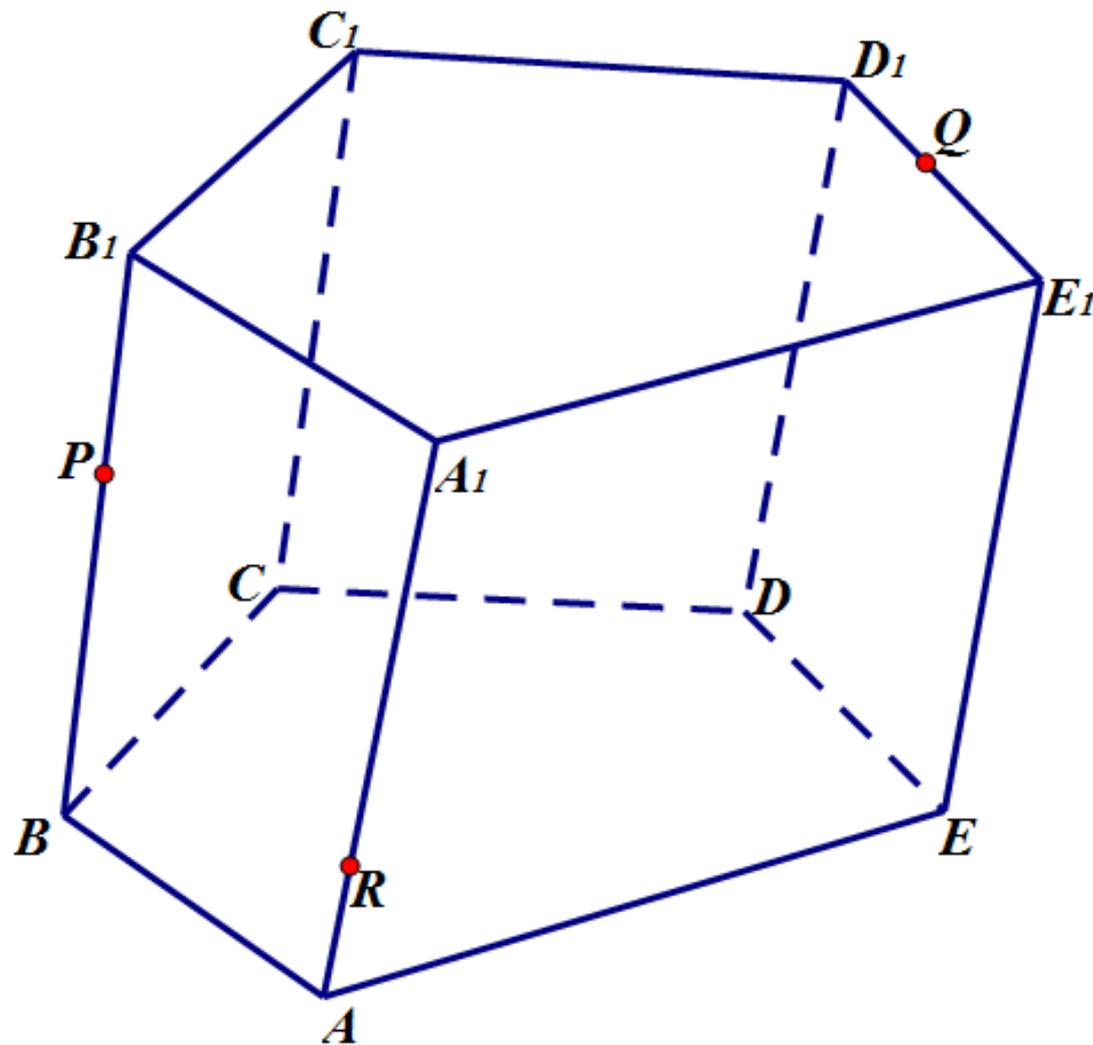
МКNRG – сечение пирамиды плоскостью MNK



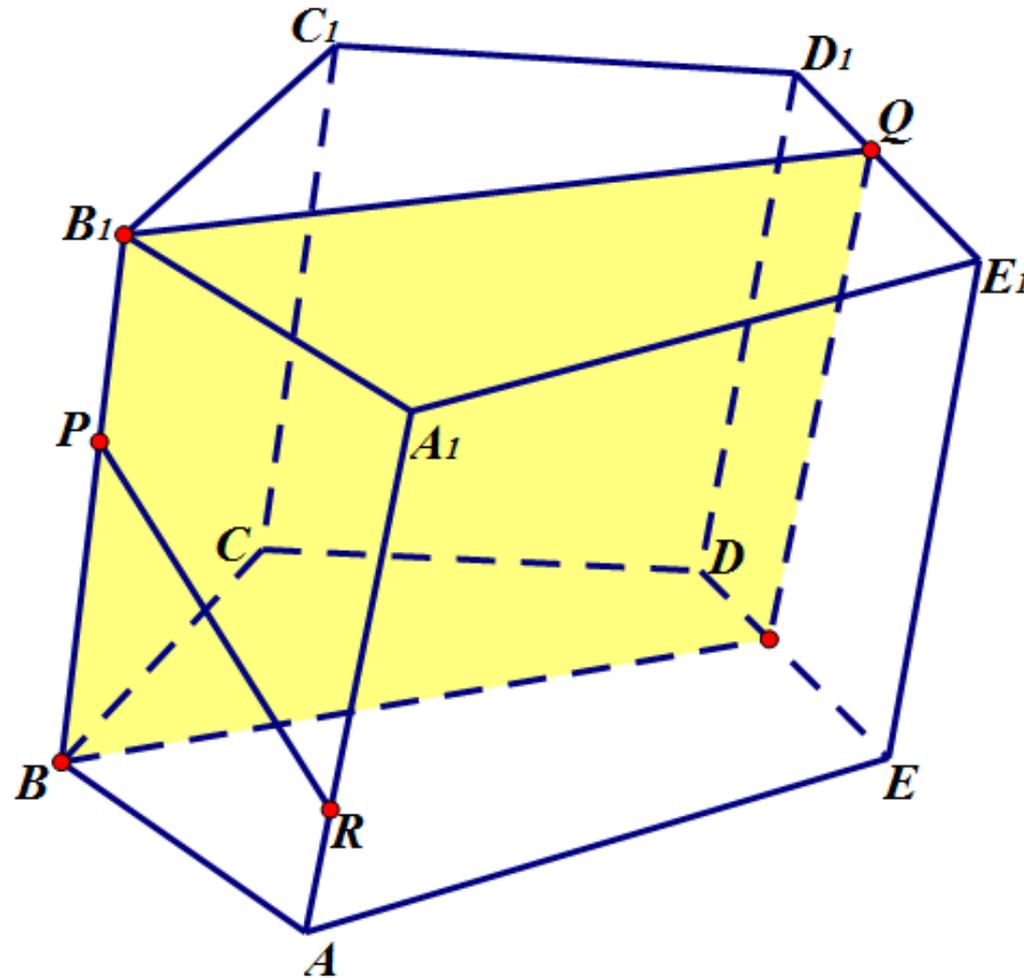
Метод вспомогательных сечений (метод внутреннего проектирования)

Универсальный метод, основанный на построении вспомогательных плоскостей, не выходящих за пределы многогранника.

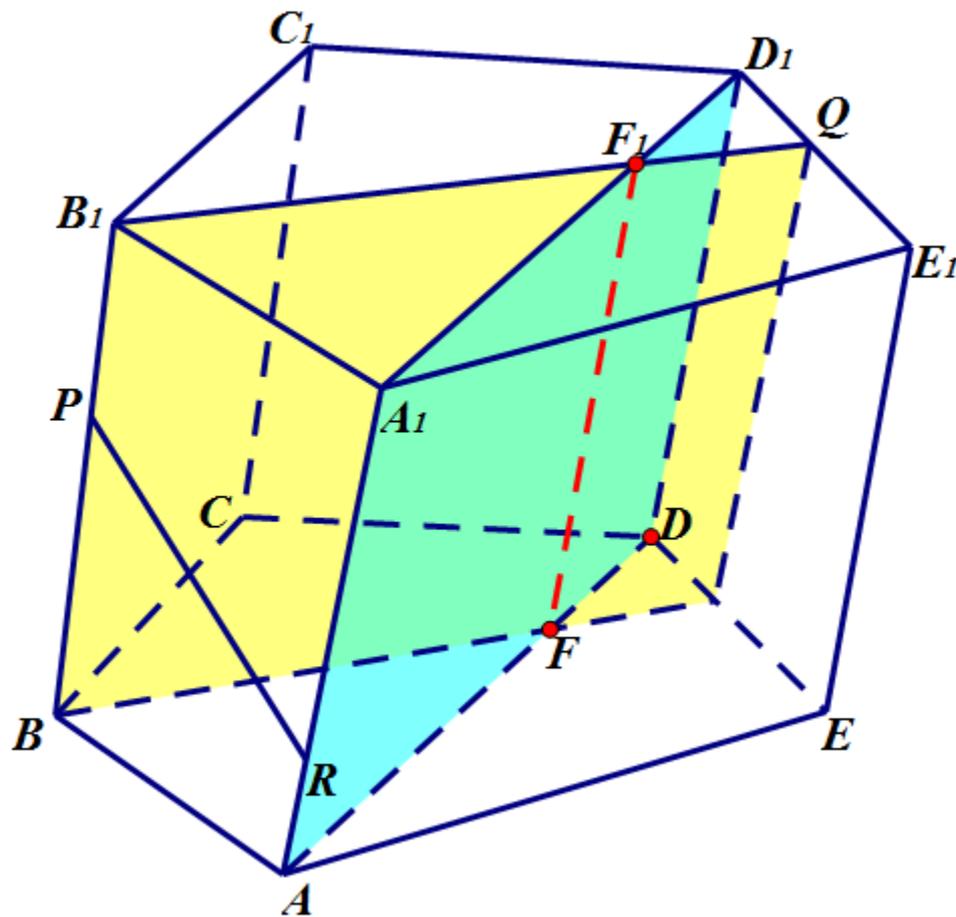
Задача. Построить сечение призмы
плоскостью PQR



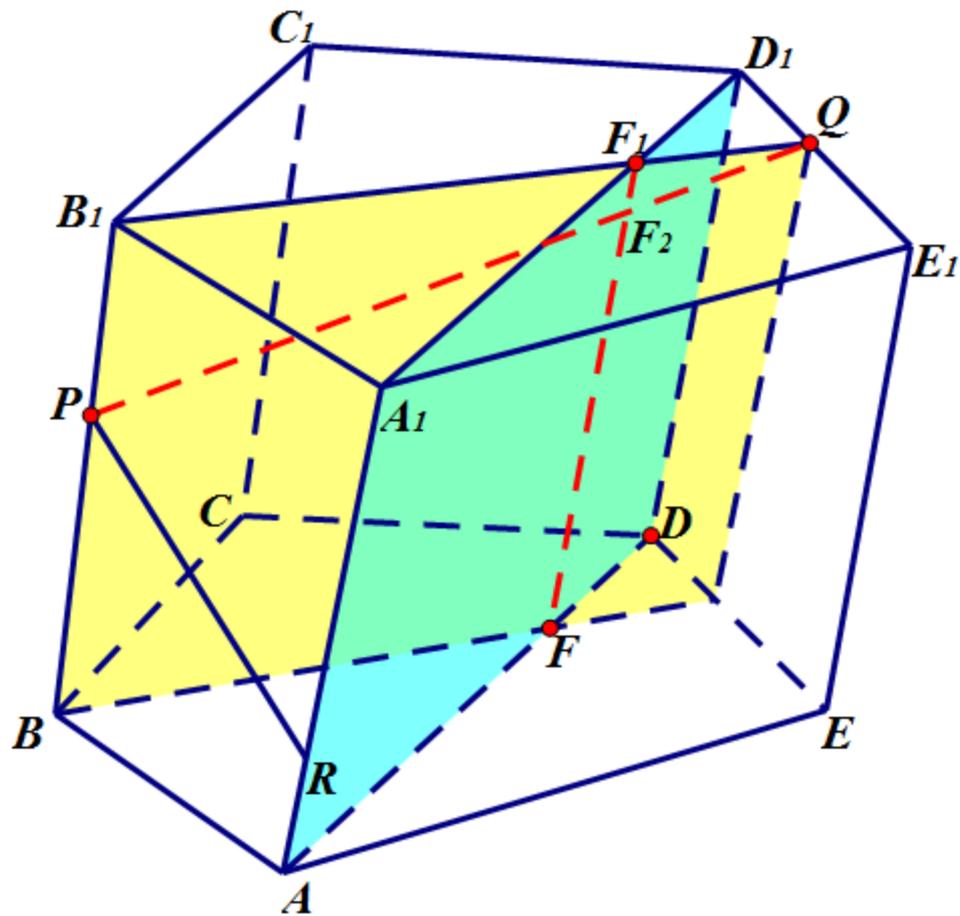
1. В грани ABB_1A_1 проведём отрезок PR .
2. Проведём вспомогательную плоскость BB_1Q

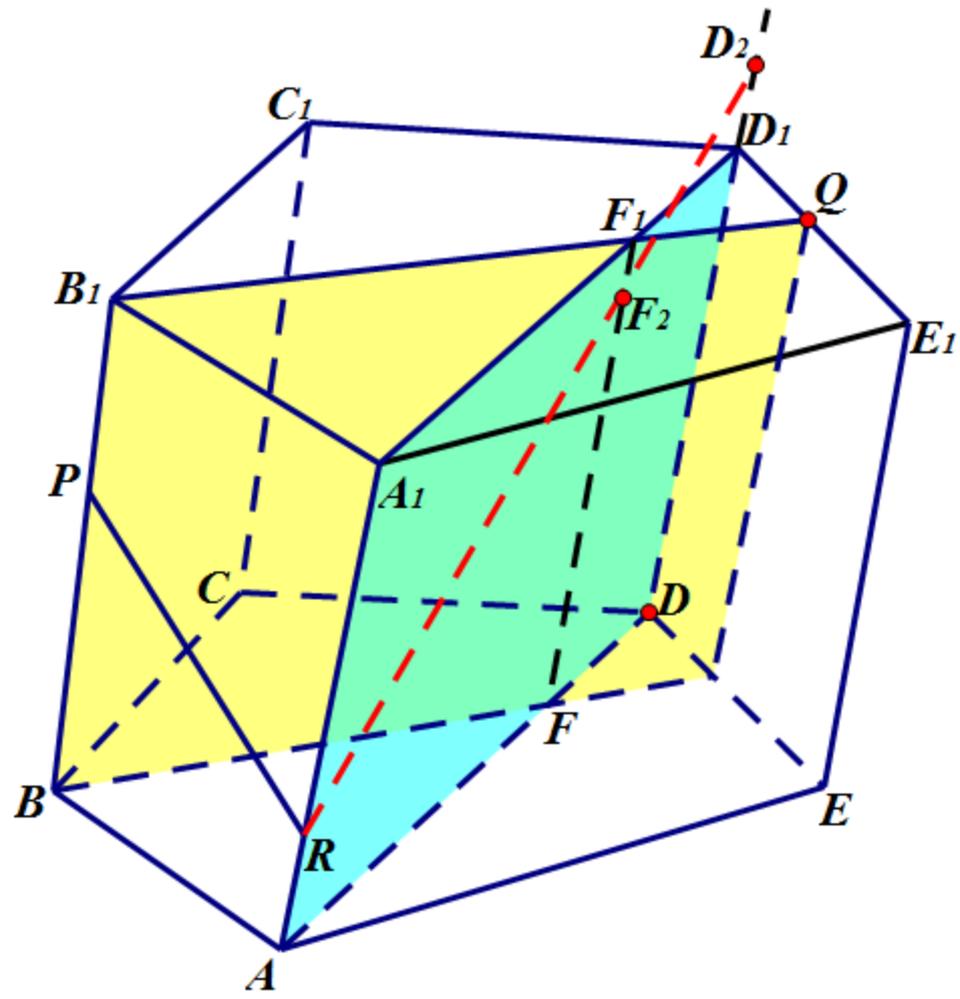


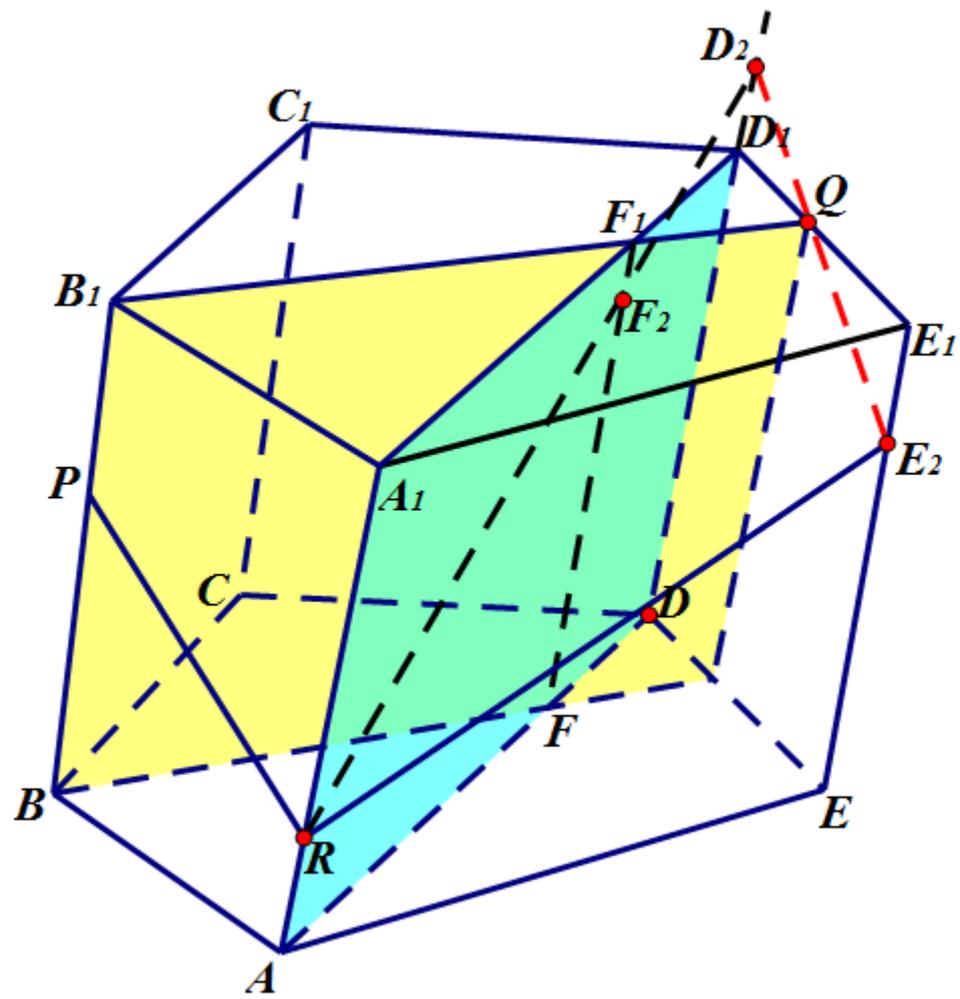
Проведем вспомогательную плоскость ADD_1 .
 FF_1 – линия пересечения ADD_1 и BB_1Q .

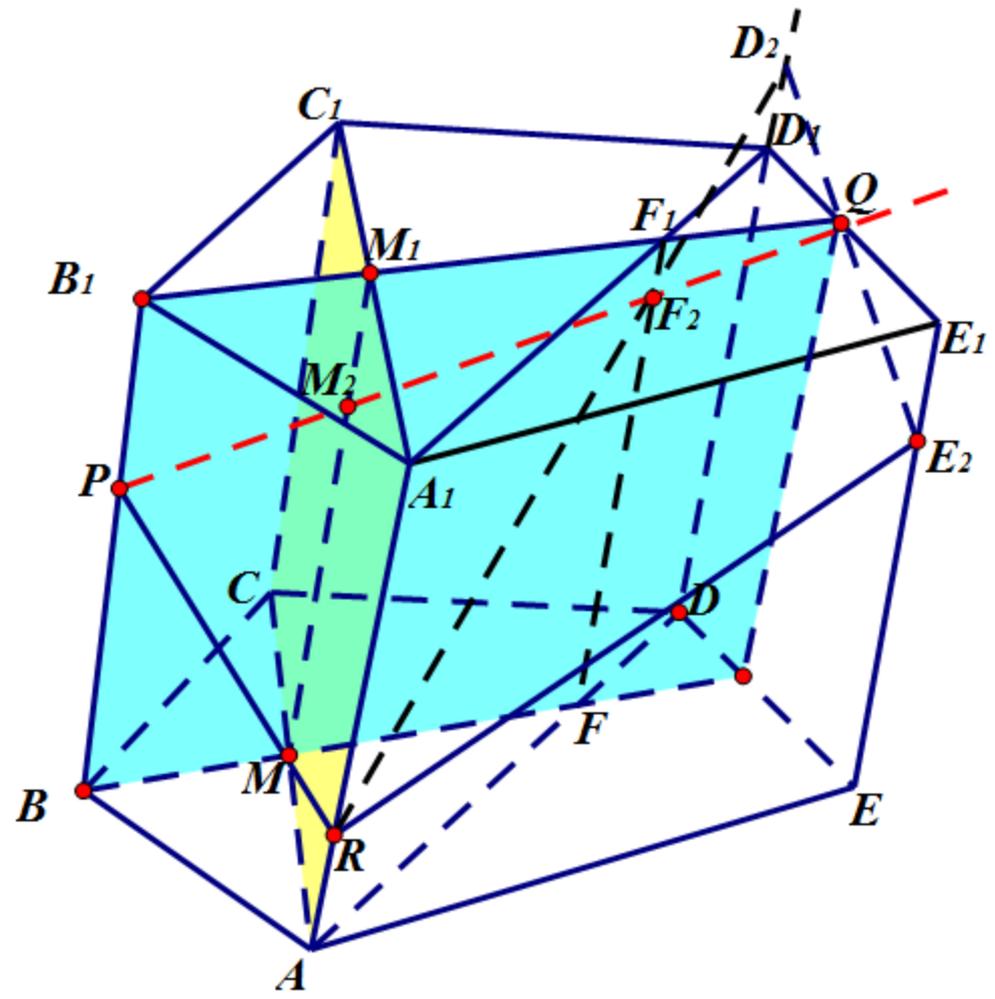


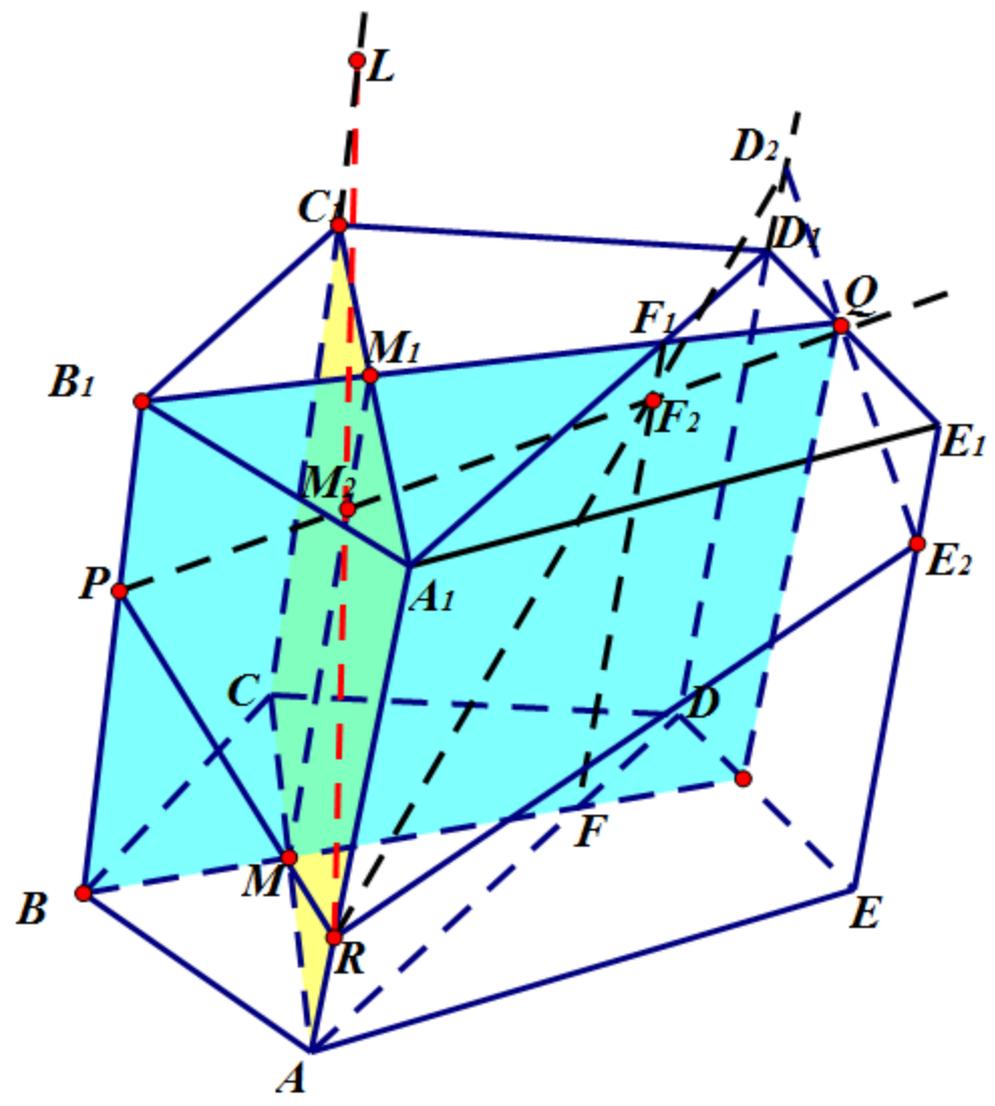
$$PQ \cap FF_1 = F_2, F_2 \in PQR$$

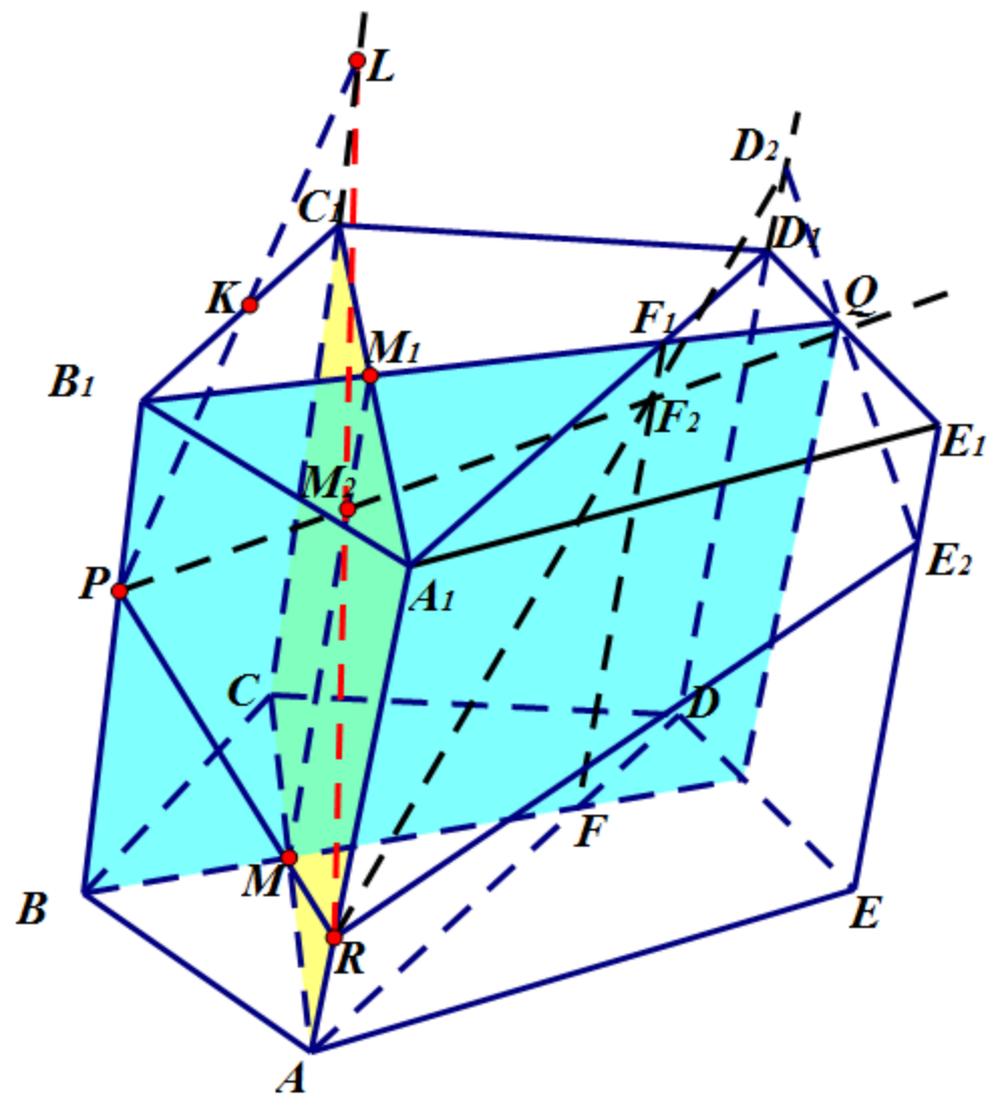


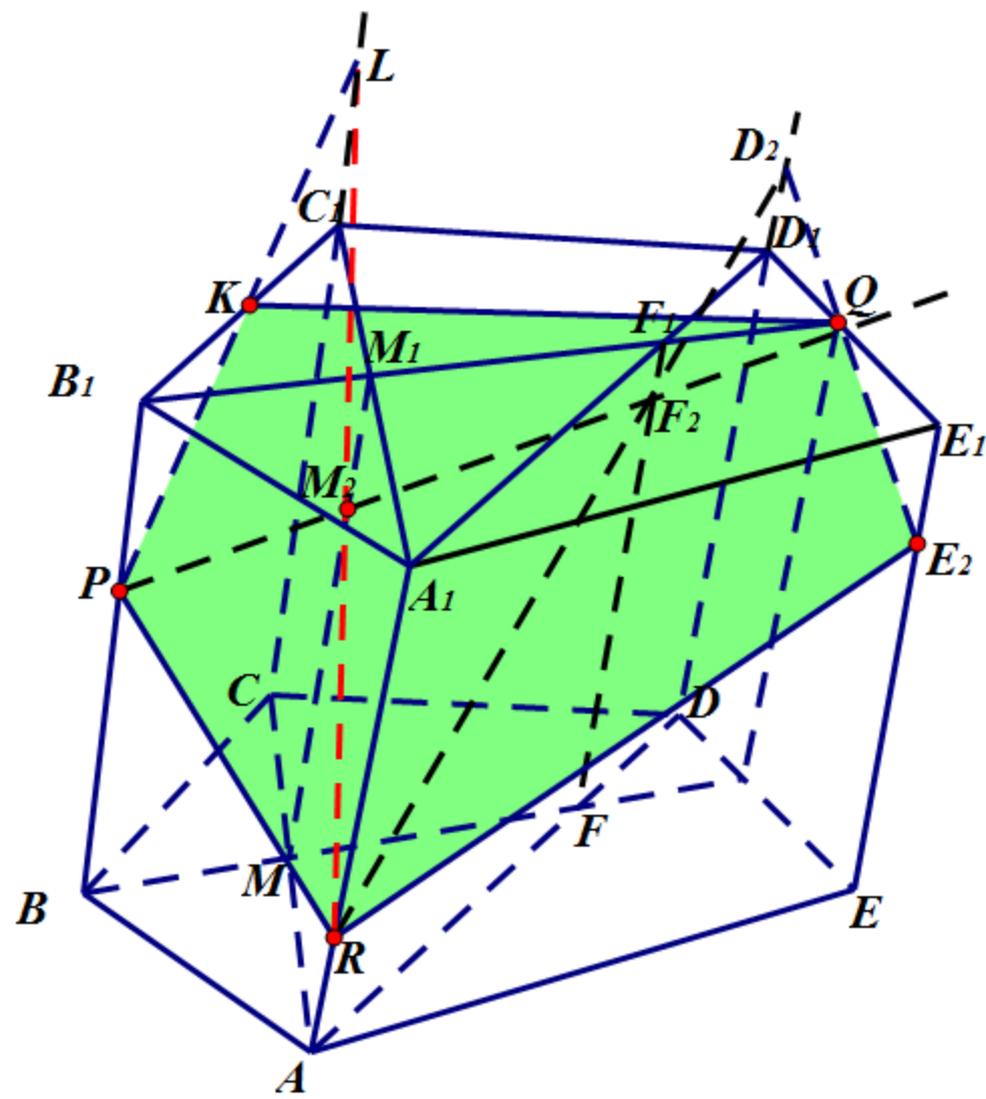










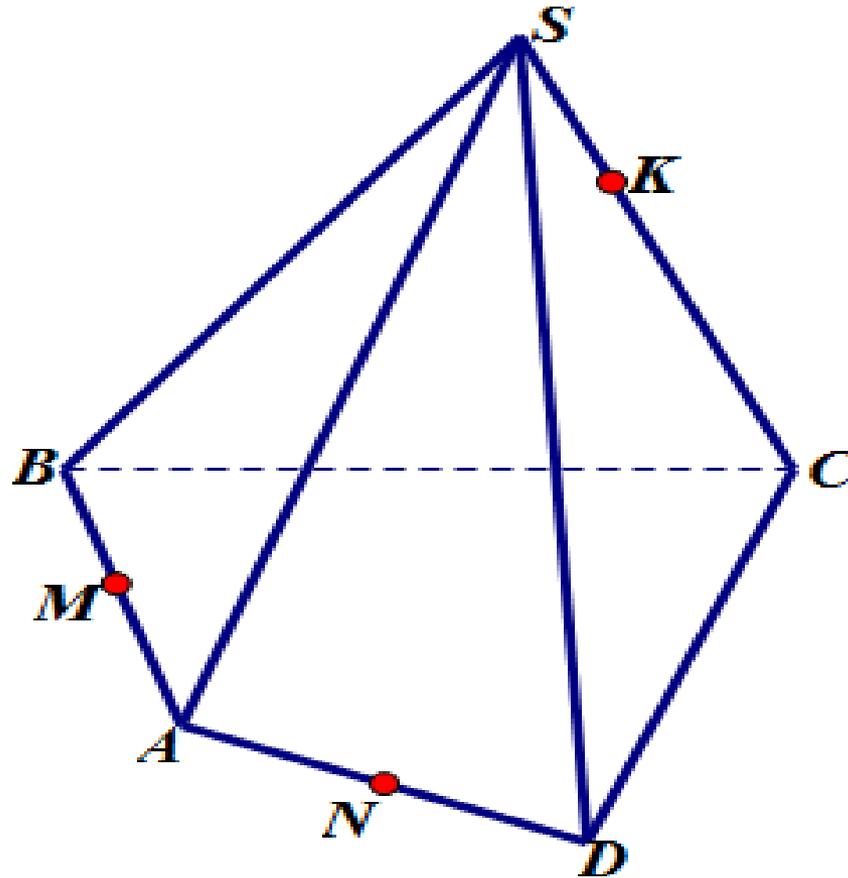


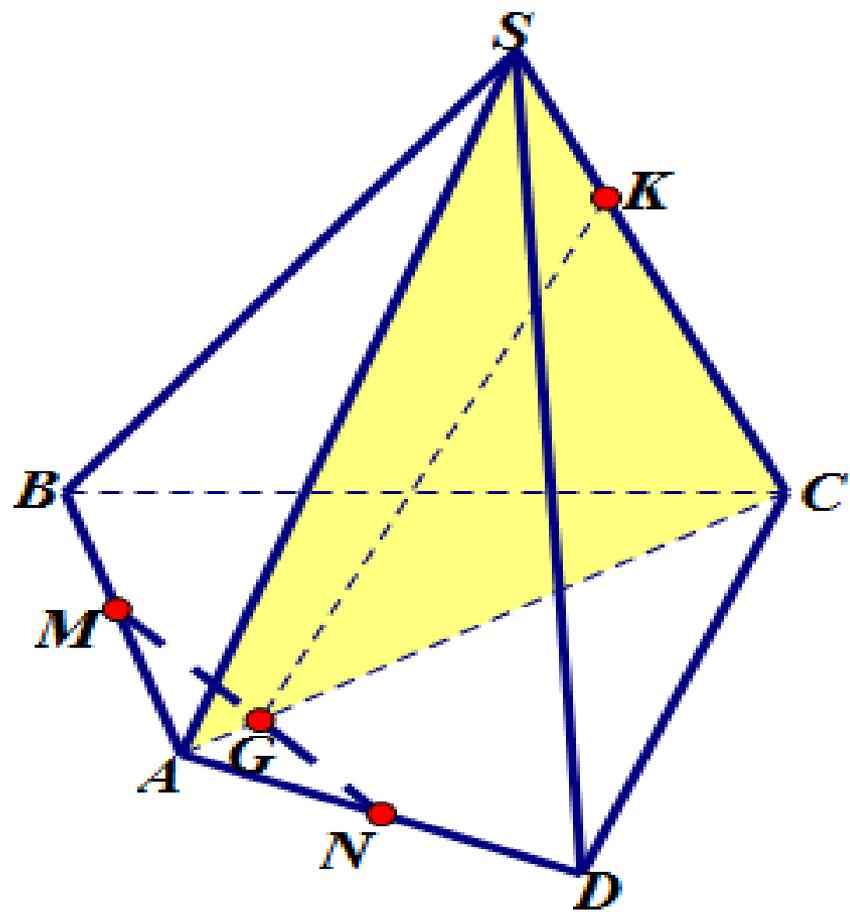
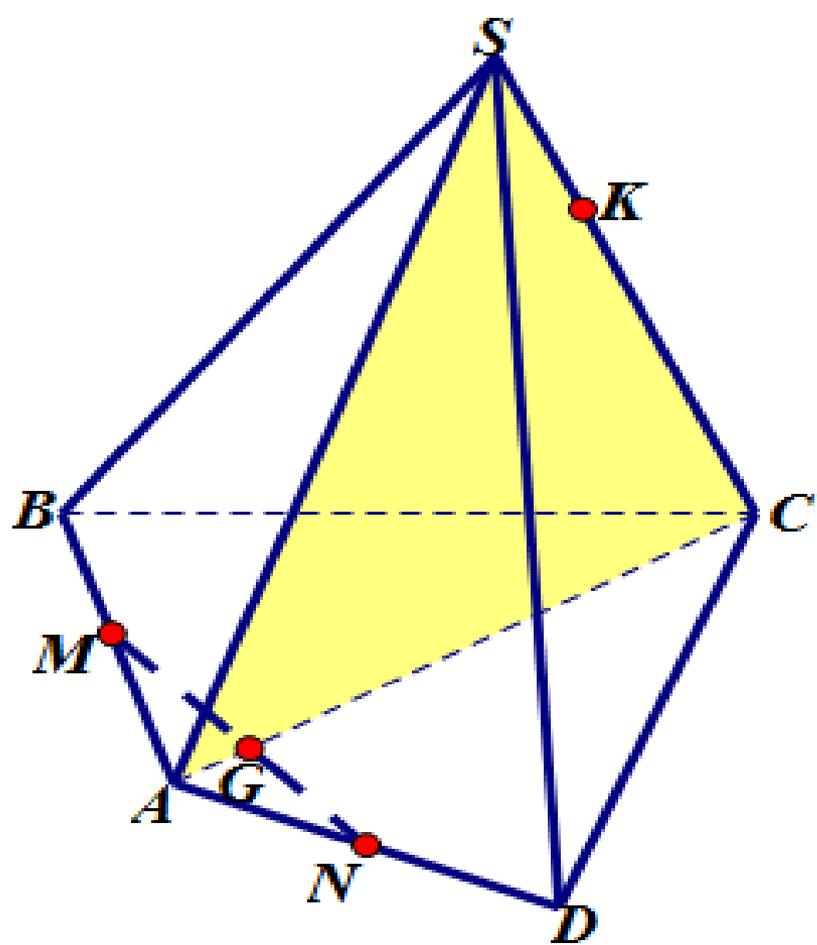
Комбинированный метод

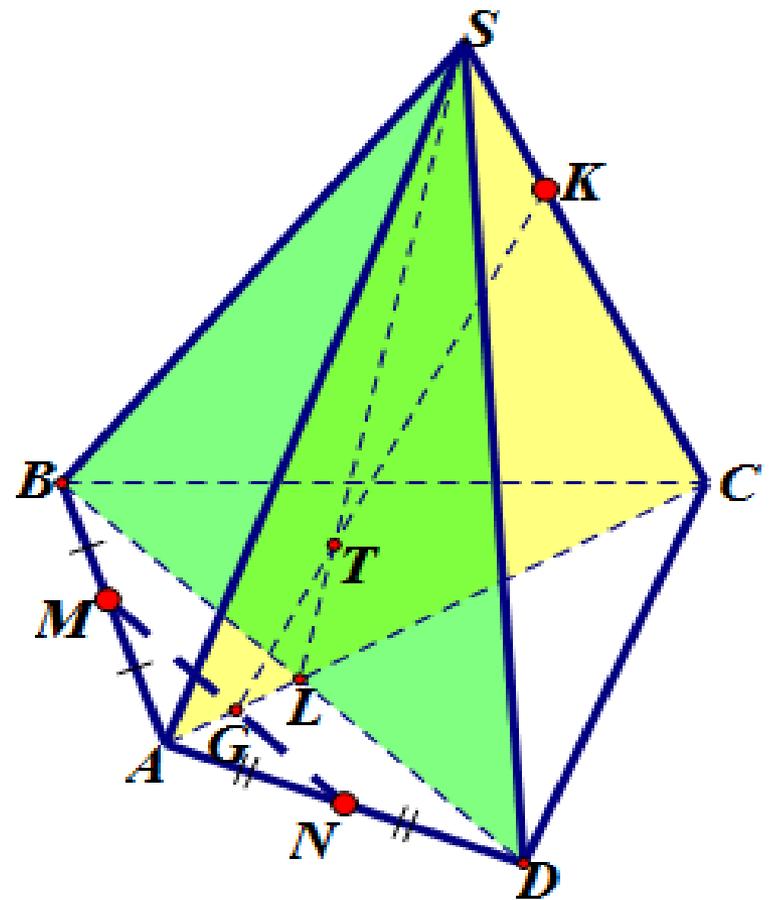
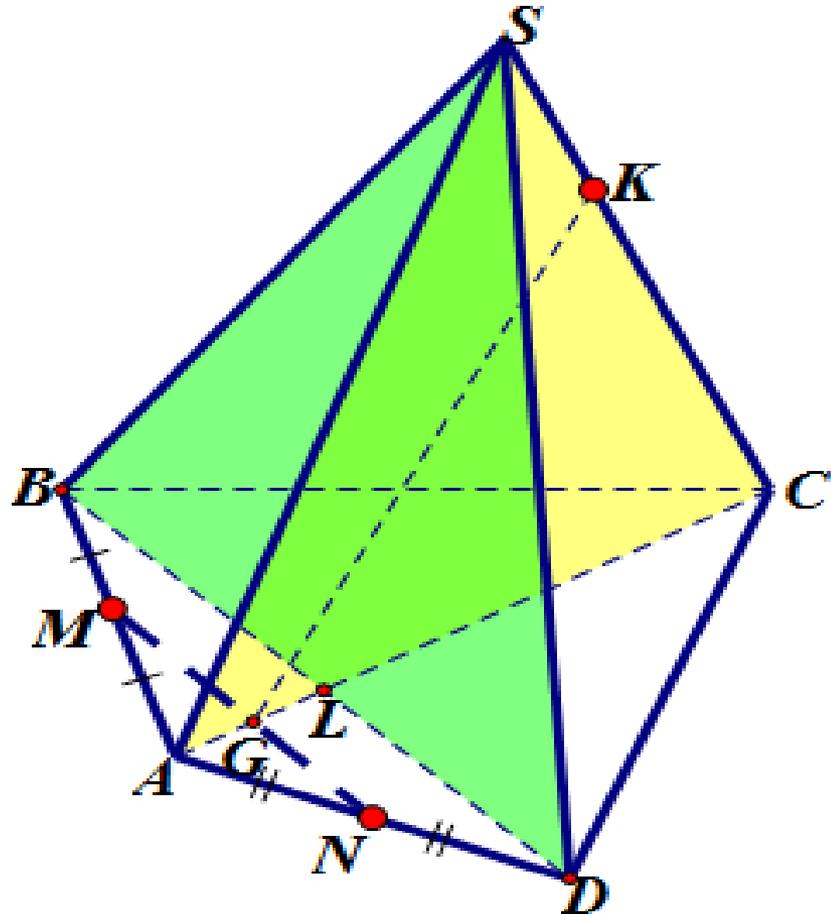


Сочетание применения теорем о
параллельности прямых и плоскостей в
пространстве и аксиоматического метода.

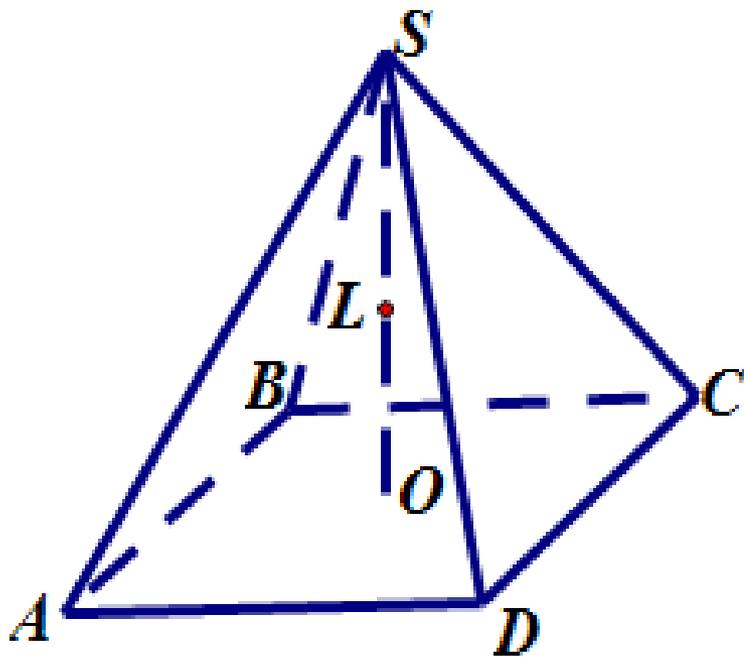
Задача. Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью MNK , если известно, что точки M и N - соответственно середины ребер AB и AD пирамиды $SABCD$, точка K принадлежит ребру SC .







^{Е.А.}**Задача 4.** Через точку L , принадлежащую высоте SO правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ постройте сечение, параллельное грани SDC .

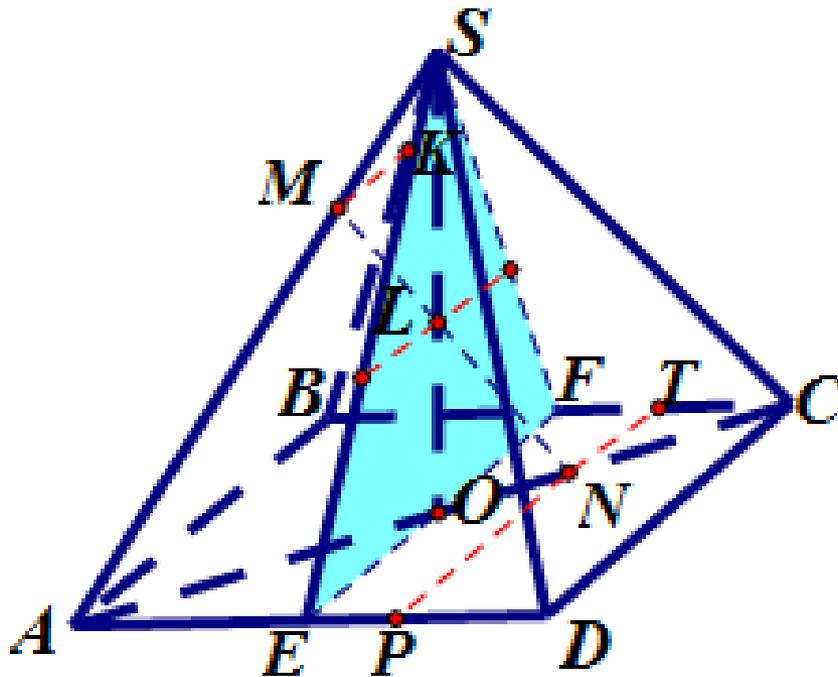


Решение.

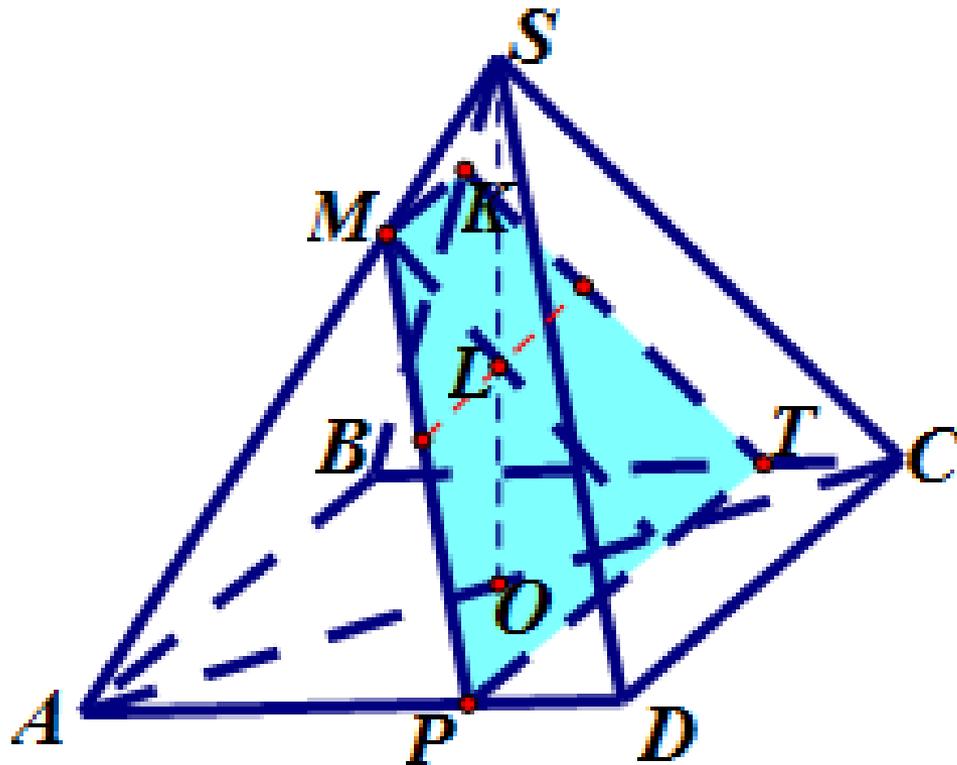
Обозначим плоскость сечения буквой α . По условию $\alpha \parallel SDC$ и $L \in \alpha$, это означает, что любая прямая плоскости α , проходящая через точку L , параллельна плоскости SDC (в противном случае плоскости SDC и α будут пересекаться).

SFE – вспомогательная плоскость.

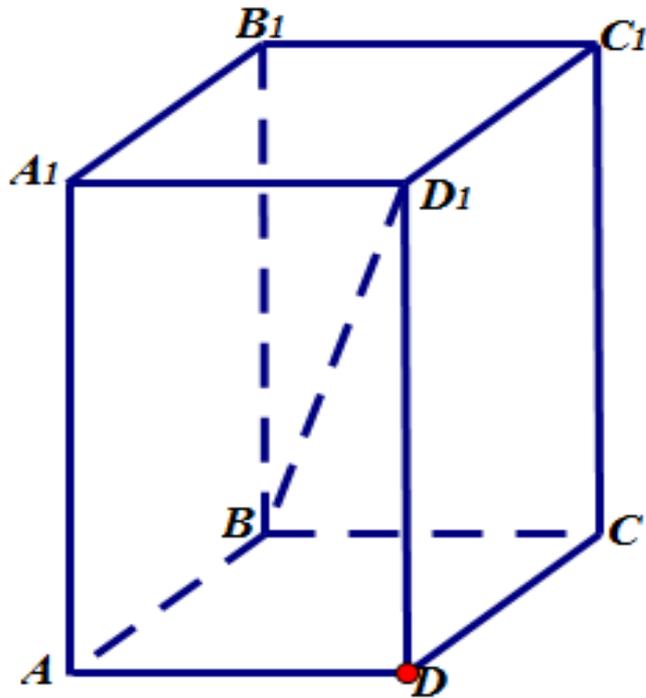
Проведем $MK \parallel EF$, $PT \parallel EF \parallel DC$.



Соединим точки P и M , K и T . $MKTP$ –
искомое сечение.

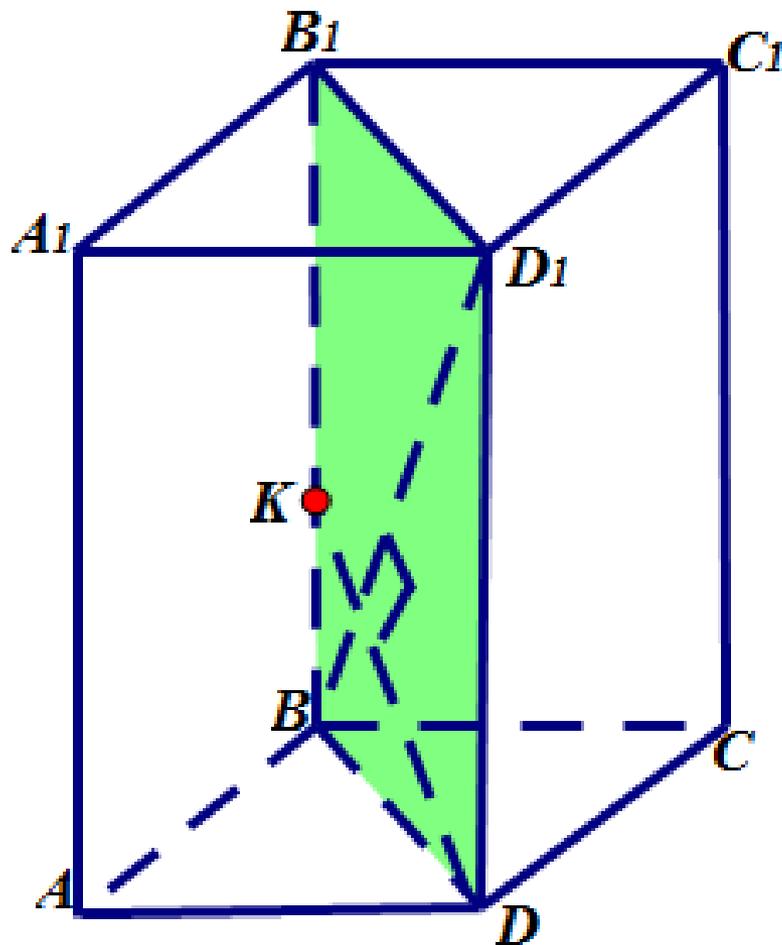


Задача 5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через точку D постройте сечение, перпендикулярное диагонали BD_1 .

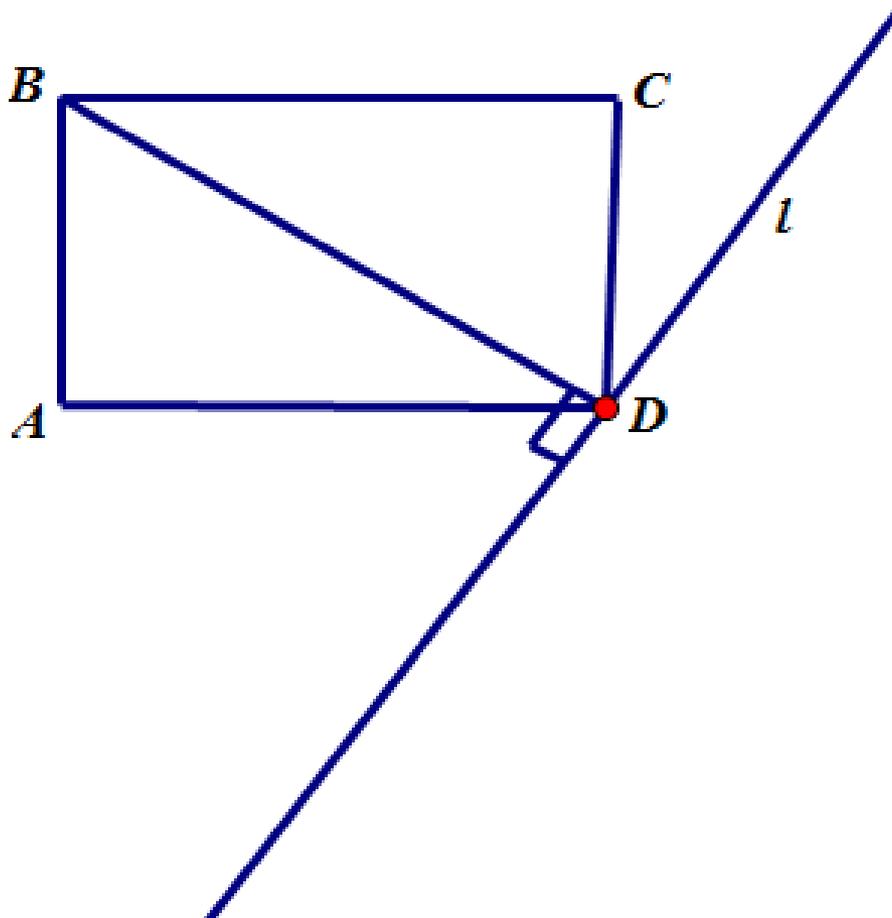


Решение.

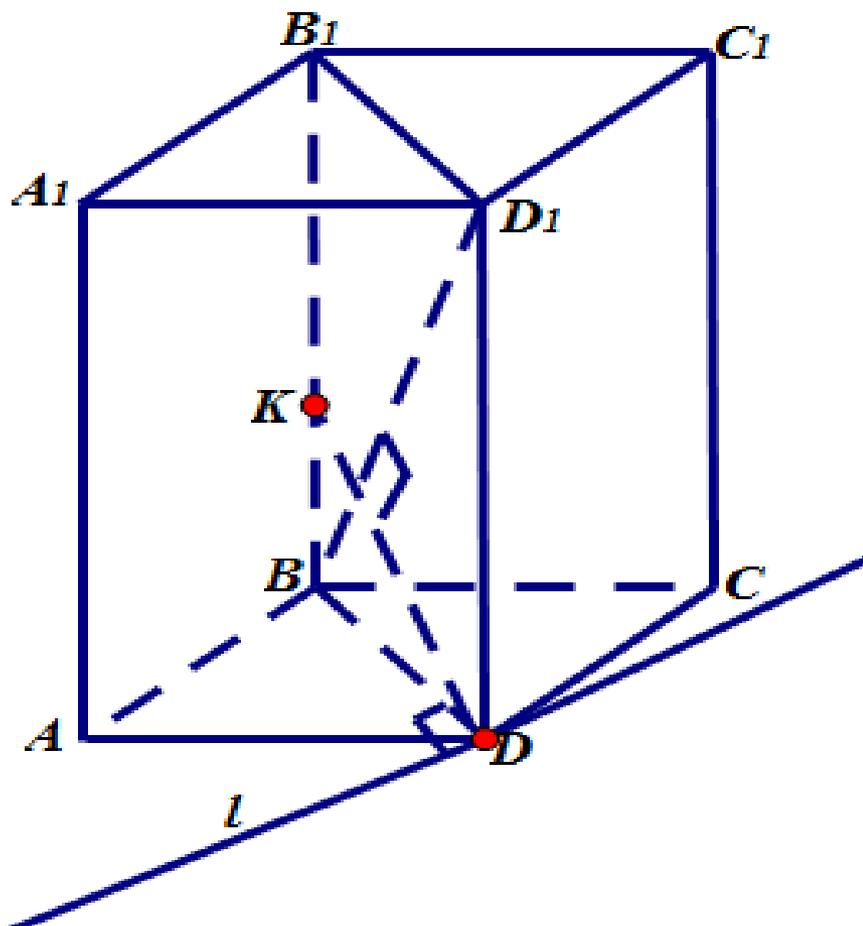
В диагональном сечении BB_1D_1D проведем DK перпендикулярно BD_1 .



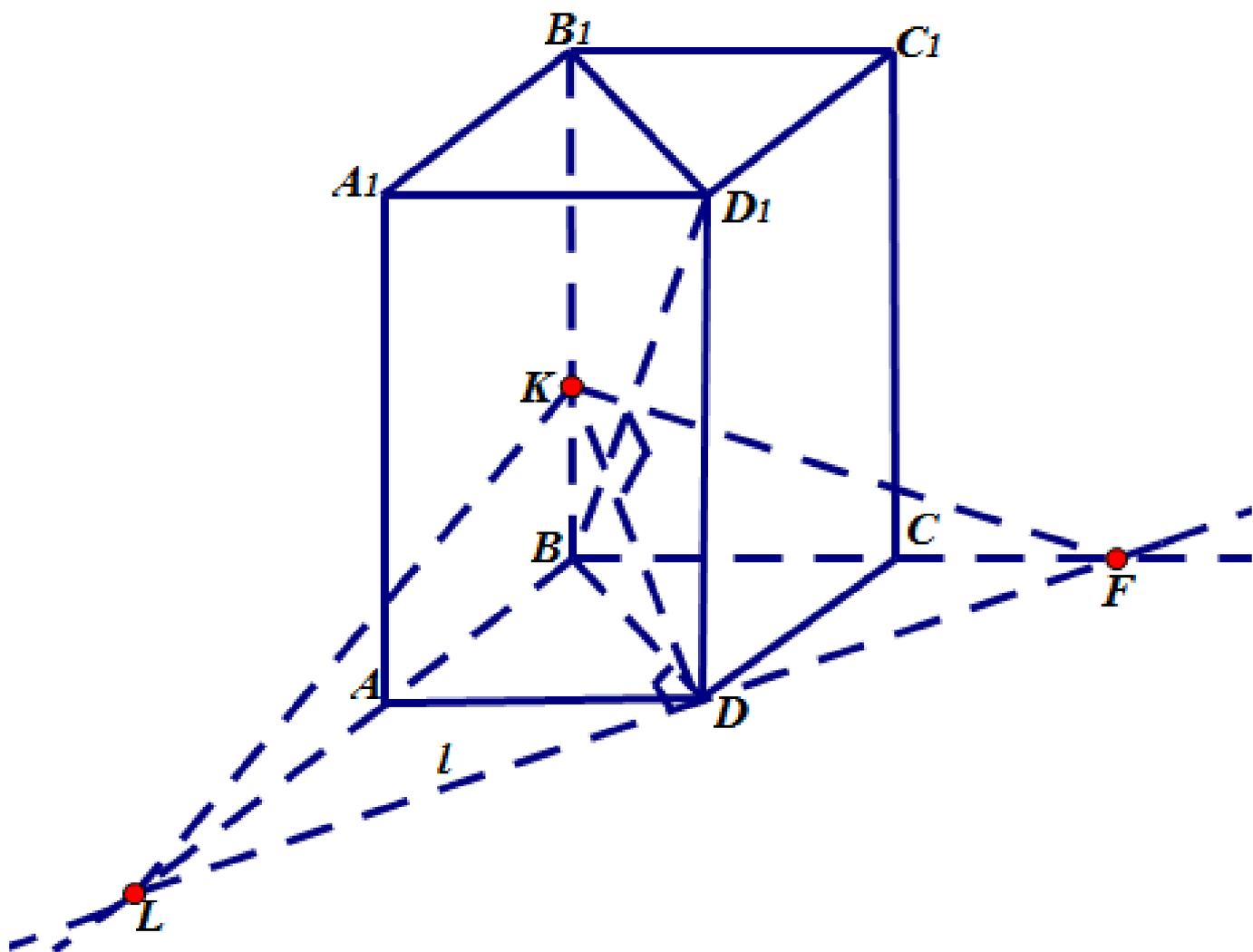
Через точку D в плоскости ABC проведем прямую l , перпендикулярную BD .



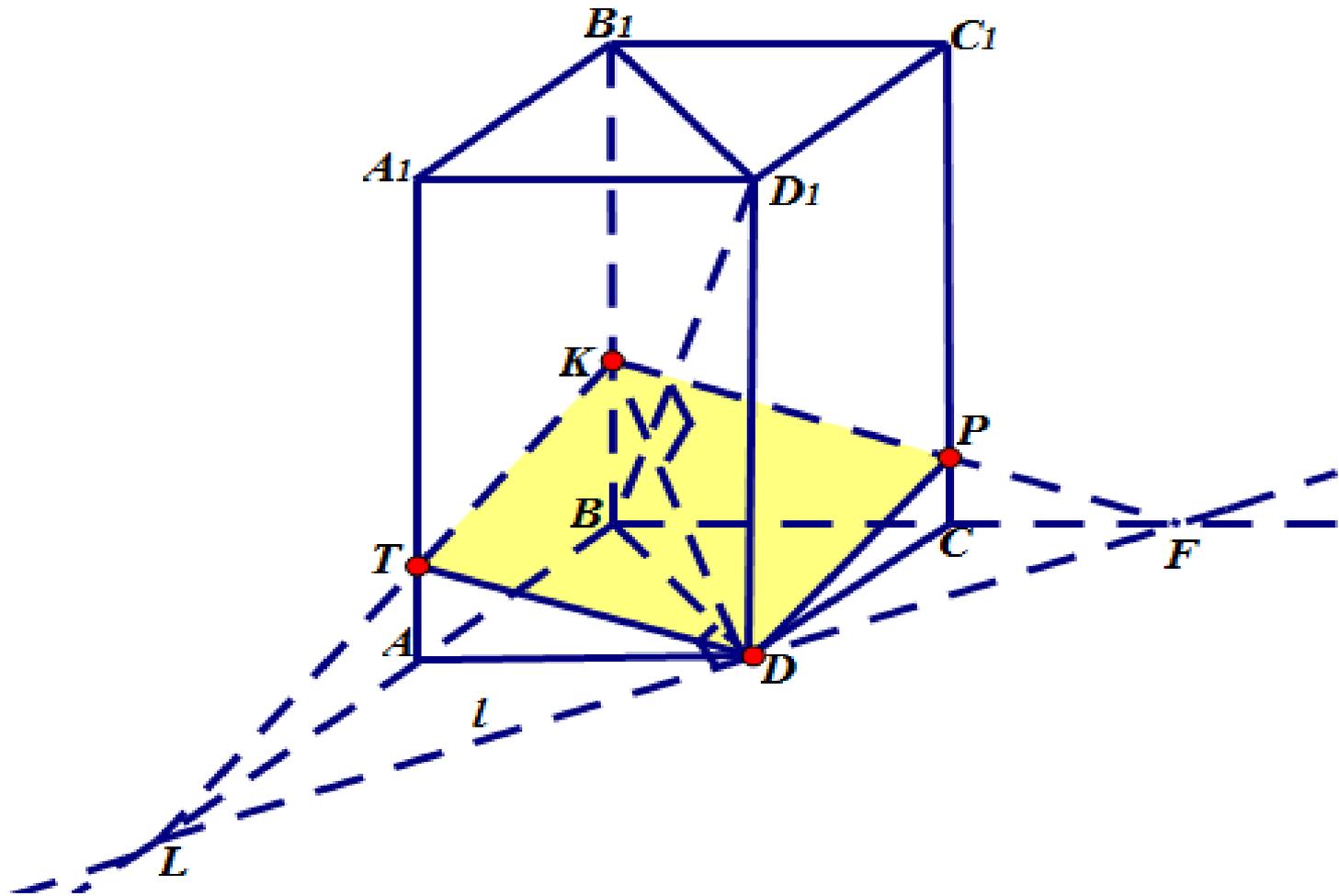
$l \perp B B_1 D_1$, поэтому $l \perp B D_1$.



$B D_1$ перпендикулярна плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые $K D$ и l .



TKPD – искомое сечение

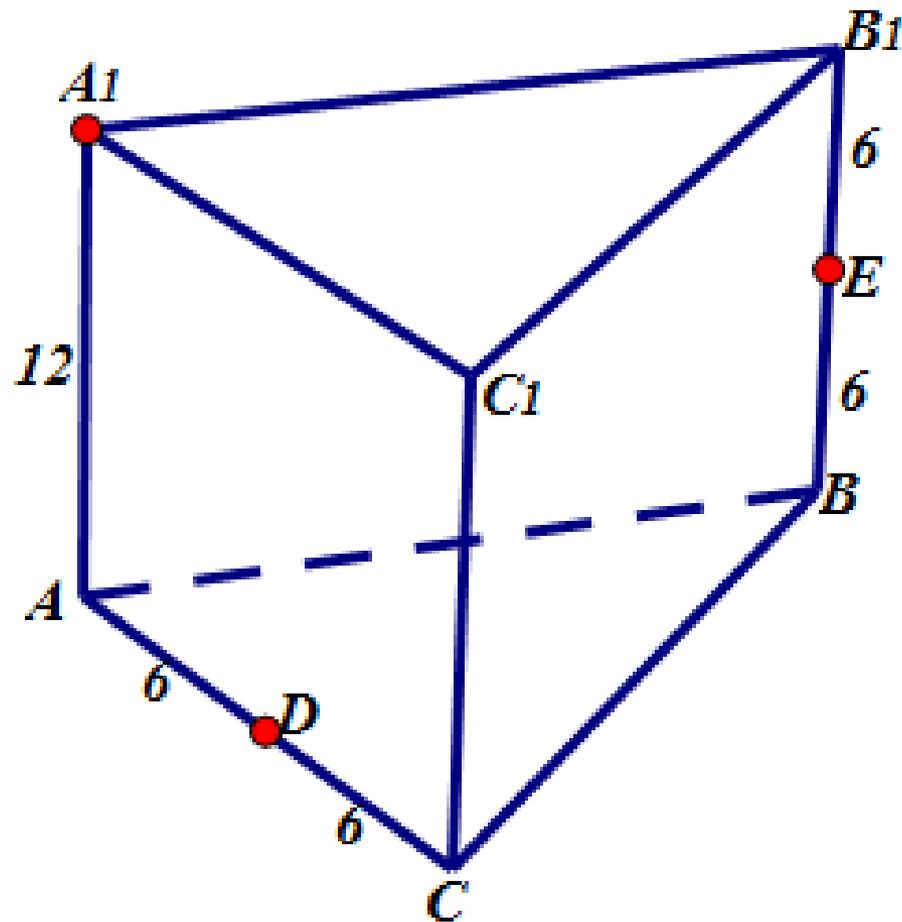


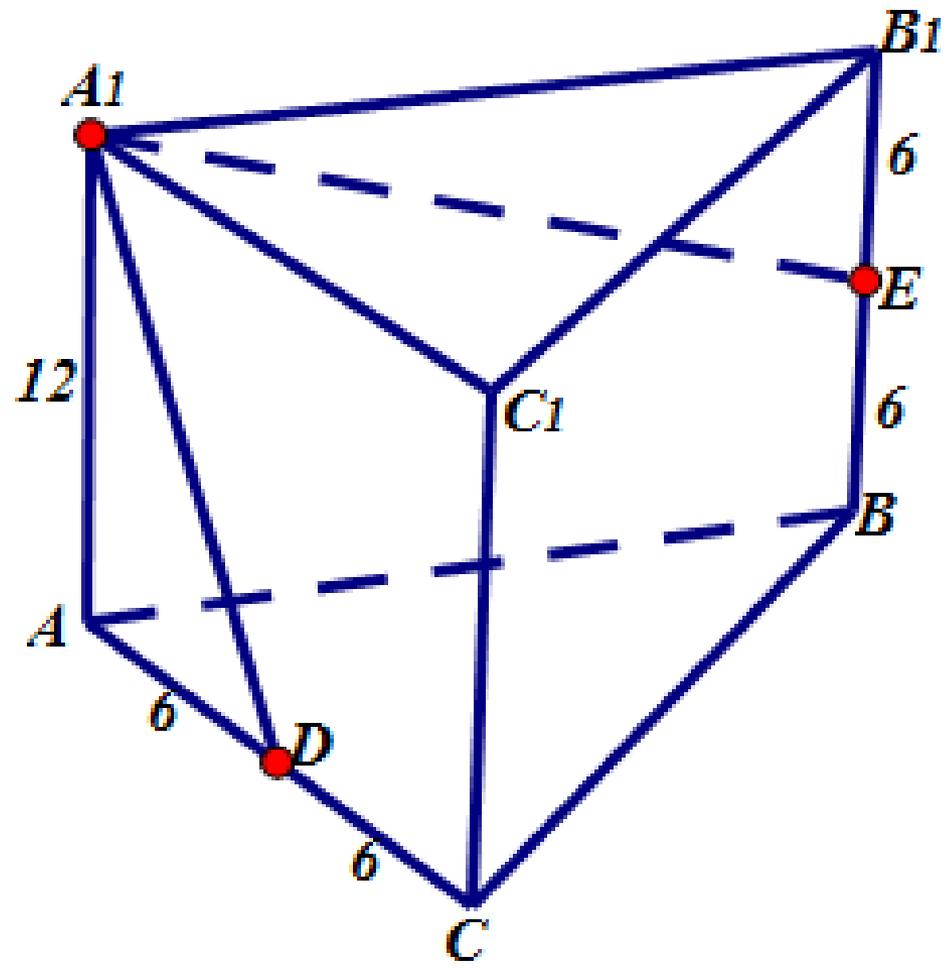
Задача

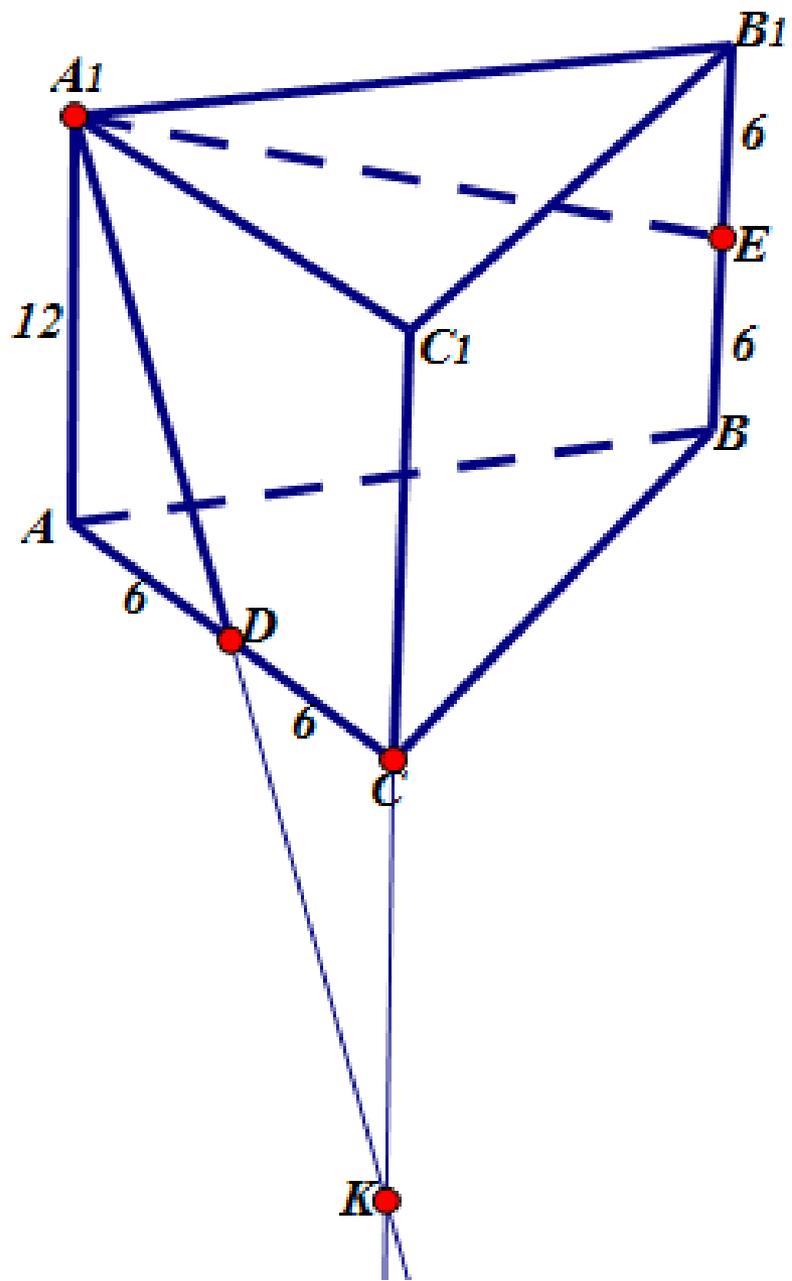
Все ребра правильной треугольной призмы $АВСА_1В_1С_1$ равны 12. Через середины ребер $АС$ и $ВВ_1$ и вершину $А_1$ призмы проведена секущая плоскость.

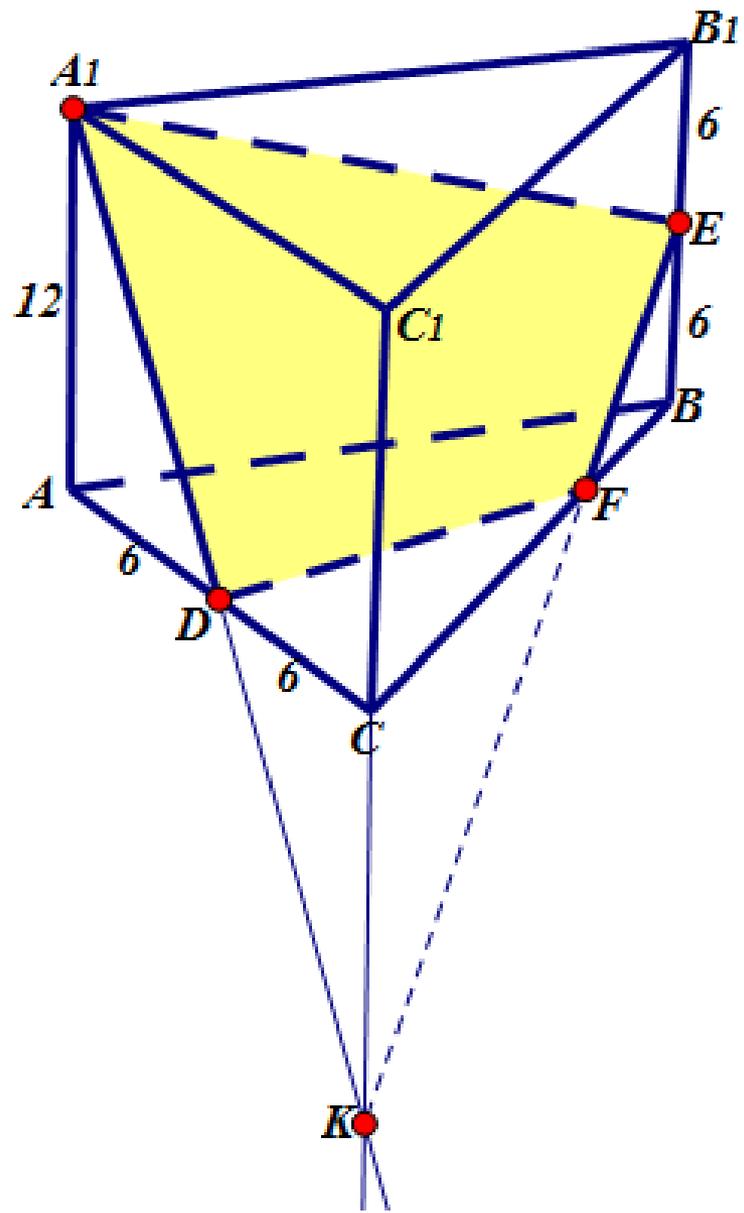
- а) Докажите, что ребро $ВС$ делится секущей плоскостью в отношении 2: 1, считая от вершины $С$;
- б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Решение.

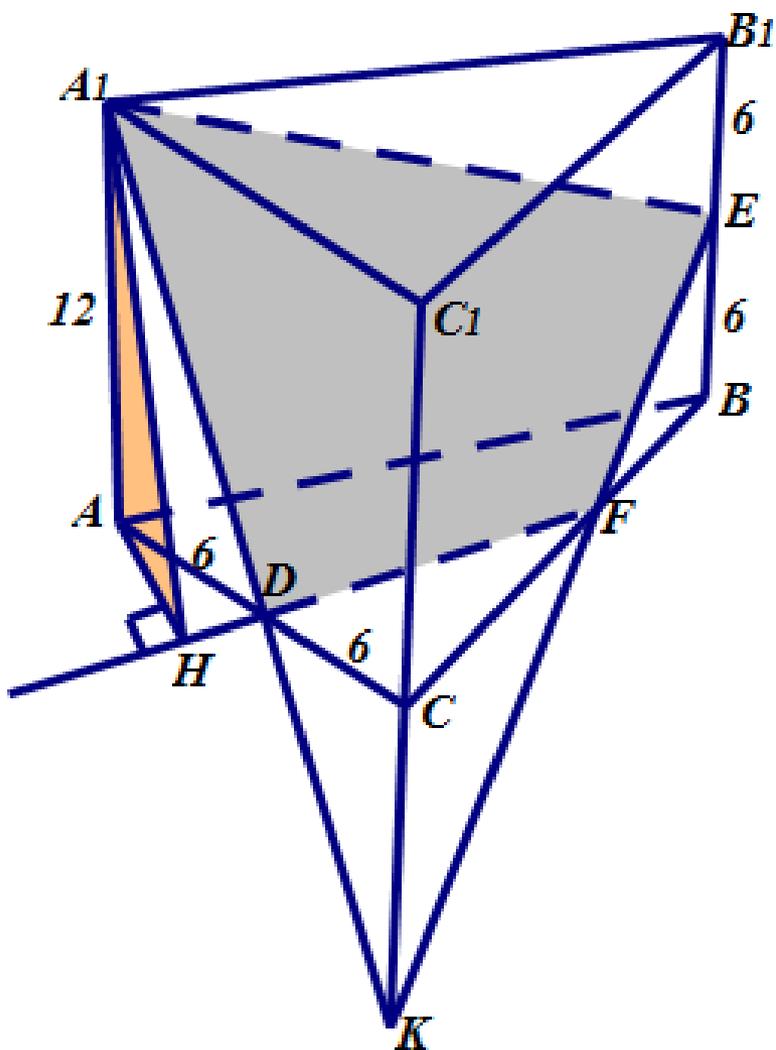








б) Угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.



$$\angle AHA_1 = \operatorname{arctg} \frac{AA_1}{AH}$$

AH-?

$$\angle ADH = \angle FDC$$

По теореме косинусов в $\triangle DFC$:

$$DF^2 = FC^2 + DC^2 - 2FC \cdot DC \cdot \cos 60^\circ,$$

$$DF^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 52.$$

$$FC^2 = DF^2 + DC^2 - 2DF \cdot DC \cdot \cos \angle FDC$$

$$8^2 = 52 + 36 - 2\sqrt{52} \cdot 6 \cdot \cos \angle FDC$$

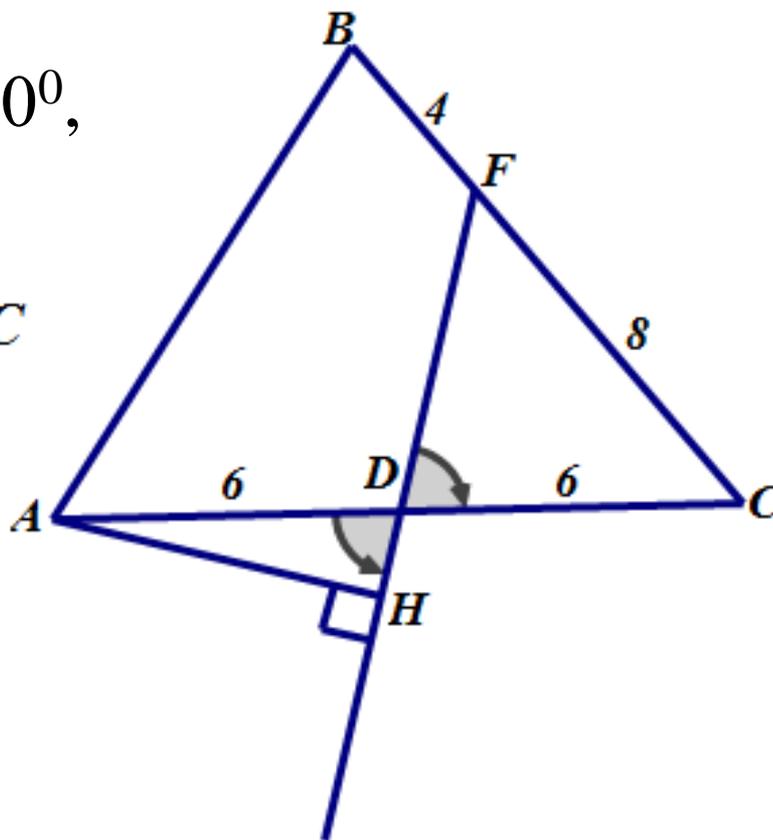
$$\cos \angle FDC = \frac{24}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{13} \cdot 6} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\sin \angle FDC = \sqrt{1 - \frac{1}{13}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$AH = AD \sin \angle FDC$$

$$AH = 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$\angle AHA_1 = \arctg \frac{AA_1}{AH} = \arctg \frac{12 \cdot \sqrt{13}}{12\sqrt{3}} = \arctg \frac{\sqrt{39}}{3}$$



Издательство «Легион»
подготовило к выпуску книгу

**Построение сечений
многогранников**

Тренажер для учащихся 10-11 классов

Авторы: Резникова Н.М., Фридман Е.М.



Структура книги

- **Некоторые теоретические факты.**
- **Раздел I. Подготовительные задачи.**
- **Раздел II. Построение сечений многогранников.**
- **Раздел III. Задачи уровня задания 14 ЕГЭ.**

Учимся применять аксиомы и теоремы

Раздел I

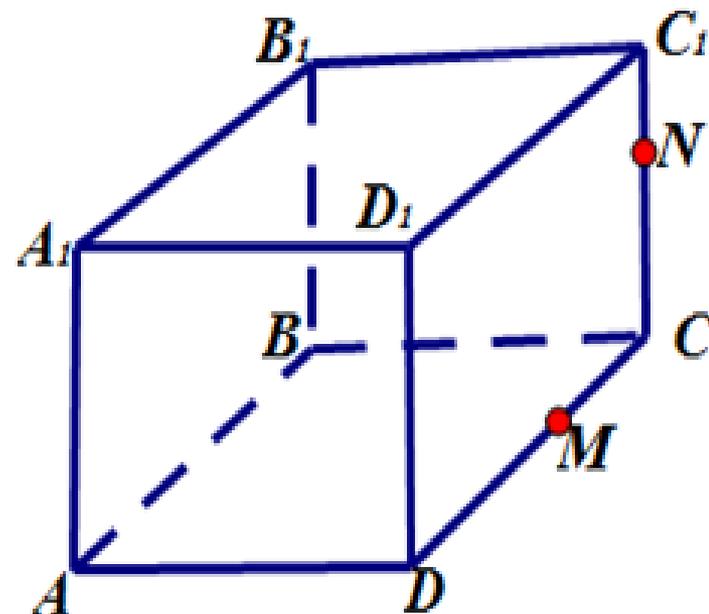
Подготовительные задачи

Задача 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $M \in DC$, $N \in CC_1$.

Выполните задания:

а) Укажите грань куба, в которой лежит отрезок MN ;

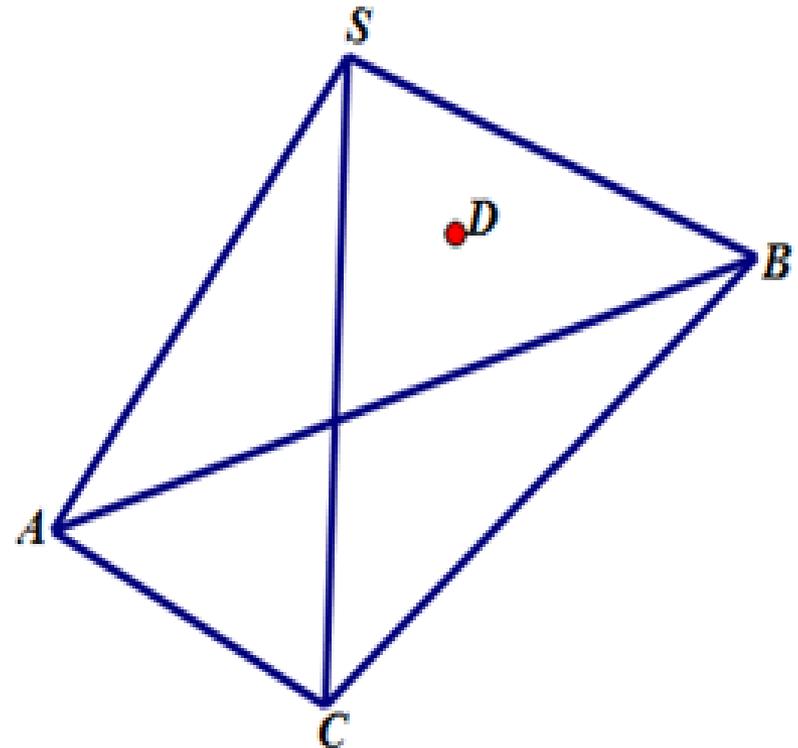
б) Укажите грань куба, параллельную отрезку MN .



Задача 3. Внутри грани SBC треугольной пирамиды $SABC$ взята точка D .

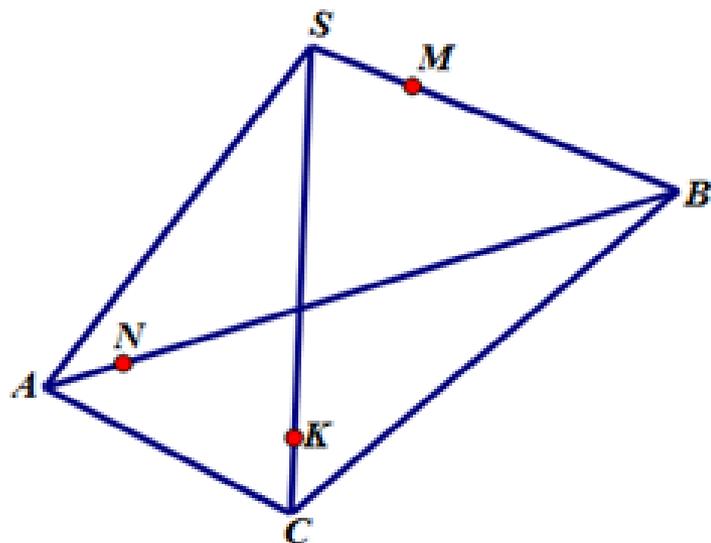
Через точку D проведите:

- а) отрезок с концами на ребрах пирамиды, параллельный ребру BC ;
- б) отрезок с концами на ребрах пирамиды, параллельный ребру SC ;
- в) отрезок с концами на ребрах пирамиды, параллельный ребру SB .



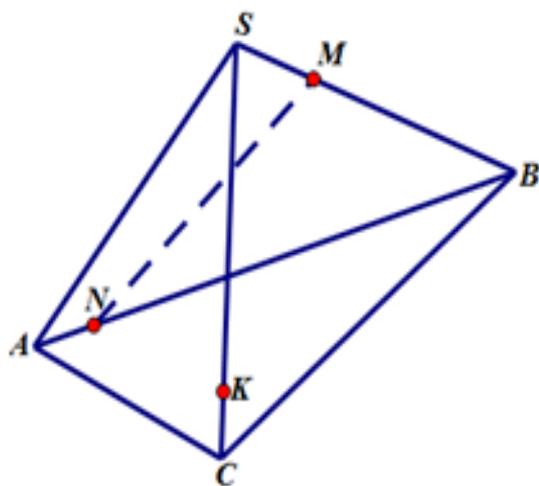
Учимся строить следы

Задача 6. Сечение пирамиды $SABC$ проходит через точки M , N , K .



Выполните задания, вставив на подчеркнутые места в представленном решении нужные точки, линии или плоскости: а) Постройте линию пересечения плоскости ASB и плоскости MNK ;

Решение.



а) Точки _____ и _____ лежат в каждой из плоскостей ASB и MNK , следовательно, _____ - линия пересечения плоскости ASB и плоскости MNK ;

Учимся распознавать вид сечения

Задача 15. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра: $AB=4$, $AD=2$, $AA_1=5$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $3:2$, считая от вершины B .

а) Постройте отрезок, по которому пересекаются грань $CC_1 D_1 D$ параллелепипеда $CC_1 D_1 D$ плоскость $AO C_1$. Найдите длину этого отрезка; (5)

б) Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью AOC ;

в) Выберите верное утверждение и обоснуйте его:

1) построенное сечение – прямоугольник.

2) построенное сечение – ромб.

3) построенное сечение – параллелограмм.

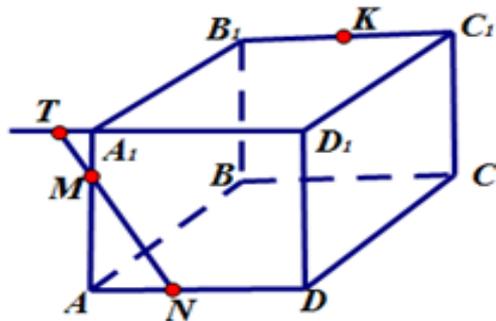
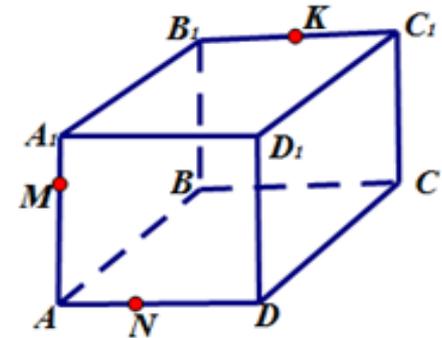
4) построенное сечение – треугольник.

Учимся обосновывать построение сечения по образцу

Раздел II

Задача 1. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью MNK .

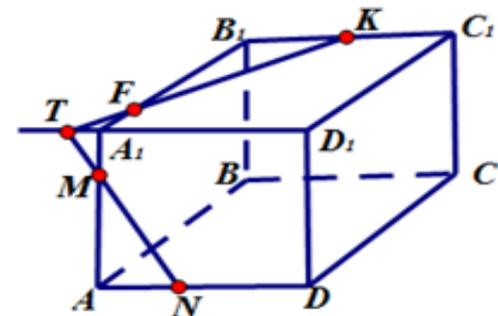
Решение.



Шаг 1. Точки M и N лежат в плоскости передней грани AA_1D_1D и в плоскости сечения MNK , поэтому прямая MN - линия пересечения этих плоскостей.

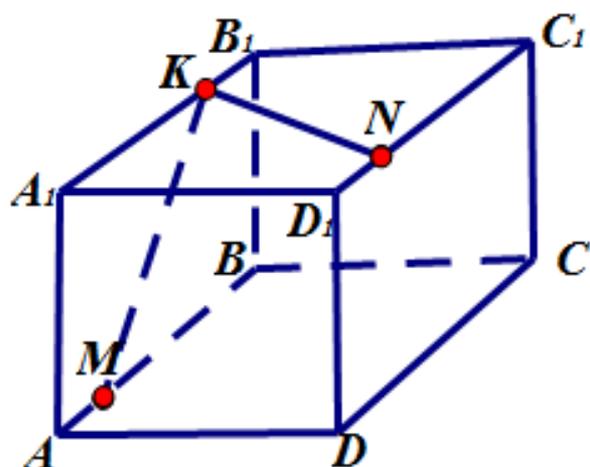
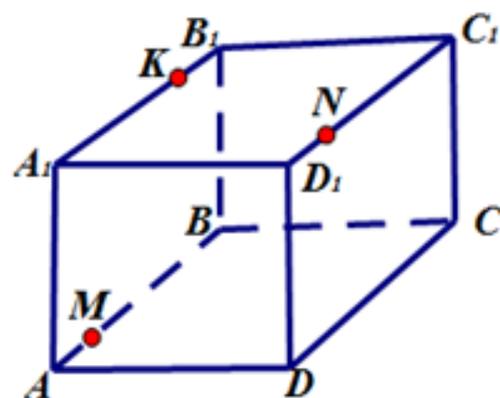
Шаг 2. Прямые MN и A_1D_1 лежат в плоскости AA_1D_1D и пересекаются в точке T , значит, точка T лежит в плоскости сечения.

Шаг 3. Точки T и K лежат и в плоскости сечения MNK и в плоскости верхней грани $A_1B_1C_1D_1$, откуда следует, что TK - линия их



Задача 2. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью MNK .

Решение.

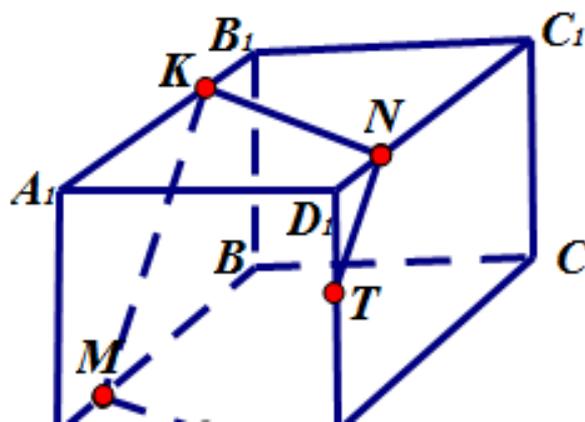


Шаг 1.

Точки _____ лежат в плоскости грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ и в плоскости сечения, значит, прямая _____ - линия пересечения этих плоскостей. Аналогично прямая KM - линия пересечения плоскости _____ и плоскости _____.

Шаг 2. По T_1 через точку N в плоскости _____ проведем прямую NT , _____ прямой MK . T - точка пересечения NT и DD_1 .

Аналогично через точку M в плоскости _____ проведем прямую MP , _____ KN . P - точка



Самостоятельно решаем задачи

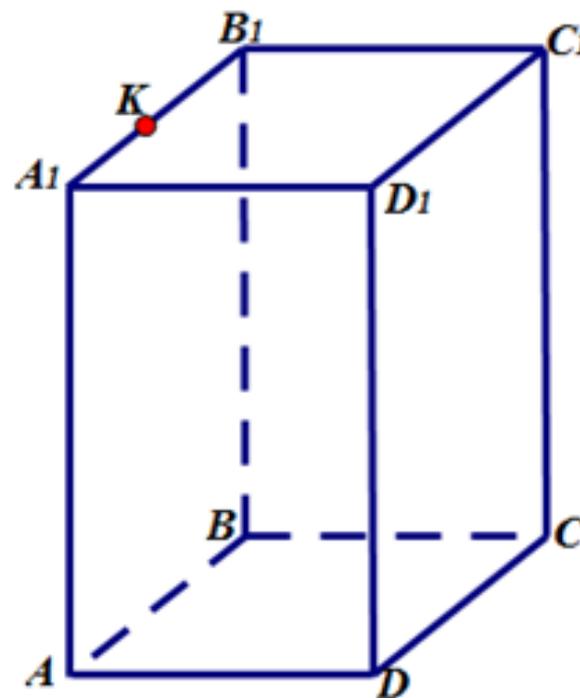
1. Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, содержащее AB_1 и параллельное ребру $A_1 D_1$.
2. Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, содержащее $A_1 D_1$ и параллельное AC .
3. Через точку пересечения медиан грани ABC пирамиды $SABC$ постройте сечение, параллельное грани ASB .
4. Постройте сечение пирамиды $SABCD$, содержащее высоту SO пирамиды и параллельное ребру AB .
5. Постройте сечение пирамиды $SABCD$, содержащее высоту SO и перпендикулярное грани SAB .
6. Постройте сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через середину ребра AB параллельно плоскости $BC_1 D$.
7. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите линию пересечения плоскостей $AB_1 C$ и $BC_1 D$.

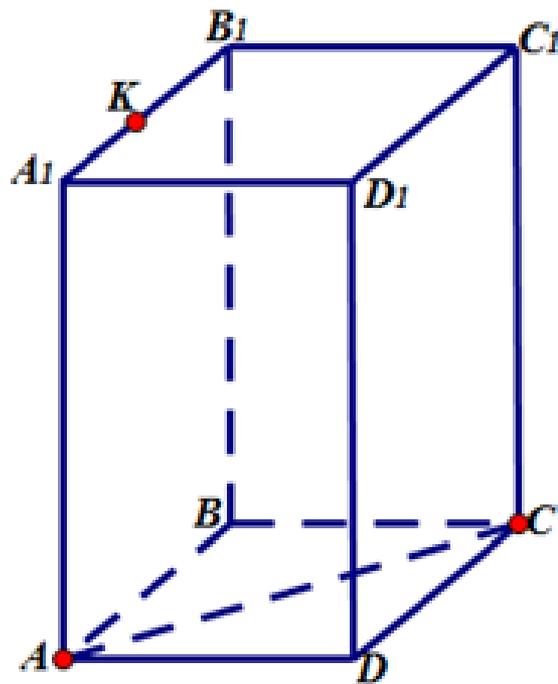
Задачи уровня задания 14 ЕГЭ

Раздел 3

Задача. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 10, а боковое ребро - 17. Точка K принадлежит ребру A_1B_1 и делит его в отношении 2:3, считая от вершины A_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки K , A и C .

Решение.





Точки _____ и C принадлежат плоскости _____, следовательно, отрезок _____ лежит в этой плоскости.

верхнего и нижнего

оснований _____,

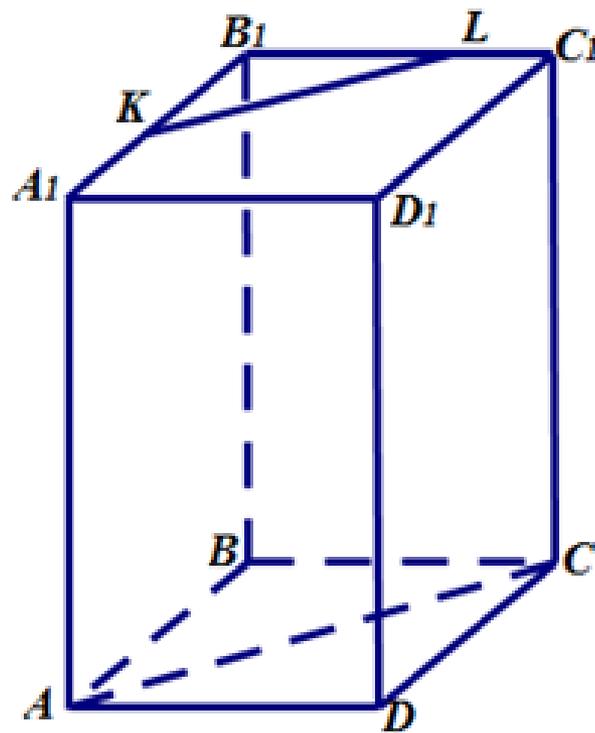
то через точку K в плоскости _____

проведем отрезок

KL _____ AC,

где _____ \in _____.

Так как плоскости



Задачи для самостоятельного решения

1. Точки M и N – середины боковых ребер SA и SB правильной треугольной пирамиды $SABC$ с основанием ABC .

1) Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной плоскости ABC и содержащей прямую MN .

2) На каком расстоянии от вершины C находится линия пересечения плоскости сечения и плоскости ABC , если $AB=30$, $AS=28$? $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

2. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, $AB=AA_1=1$, O – точка пересечения диагоналей грани BB_1C_1C . Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точки A и O и параллельной BC . 30°

3. M – точка пересечения медиан грани SAB правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$.

1) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M , перпендикулярной плоскости ABC и параллельной ребру AB .

2) Найдите расстояние от ребра AB до плоскости сечения, если $AB=5\sqrt{2}$, $AS=13$? $\frac{5\sqrt{2}}{6}$