



Издательство «Легион»

Табличный метод решения задач ЕГЭ по теории вероятностей



докладчик: Кулабухов Сергей Юрьевич

Спецификация КИМ ЕГЭ 2020 по математике, профиль (фрагмент)

4	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.4	6.3	Б	1	5	3
---	--	-----	-----	---	---	---	---

Спецификация КИМ ЕГЭ 2020 по математике, база (фрагмент)

10	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.4	6.3.1	Б	1	11
----	--	-----	-------	---	---	----

Кодификатор элементов содержания КИМ ЕГЭ 2020 по математике (фрагмент)

6.3		<i>Элементы теории вероятностей</i>
	6.3.1	Вероятности событий
	6.3.2	Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач

Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников, КИМ ЕГЭ 2020 по математике (фрагмент)

5.4	Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий
-----	--

Основные теоремы

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Если события A и B независимы, то

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Задача 1. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, то она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

Решение.

1-й способ.

Так как вероятности выигрыша и проигрыша равны 0,3, то вероятность ничьей равна $1 - 0,3 - 0,3 = 0,4$. Команда выходит в следующий круг либо после двух выигрышей, либо после выигрыша и ничьей.

1. Вероятность события A «команда выиграла оба матча» по формуле пересечения независимых событий находим как $P(A) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$.

2. Вероятность события B «команда выиграла первый матч, закончила вничью второй матч» равна $P(B) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$.

3. Вероятность события C «команда закончила вничью первый матч, выиграла второй матч» равна $P(C) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$.

События A , B , C попарно несовместны, вероятность их объединения равна

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) = \\ &= 0,09 + 0,12 + 0,12 = 0,33. \end{aligned}$$

Ответ: 0,33.

2-й способ.

Составим таблицу возможных результатов матчей и вероятностей этих результатов.

		Второй матч		
		победа $P = 0,3$	ничья $P = 0,4$	поражение $P = 0,3$
Первый матч	победа $P = 0,3$	0,09	0,12	0,09
	ничья $P = 0,4$	0,12	0,16	0,12
	поражение $P = 0,3$	0,09	0,12	0,09

Числа в ячейках получаются по принципу таблицы умножения (умножение вероятностей соответствующих результатов первого и второго матчей), так как вероятности результатов первого и второго матча не зависят друг от друга. Жирным шрифтом в таблице выделены вероятности тех результатов, при которых команда выходит в следующий круг. Искомая вероятность равна $0,09 + 0,12 + 0,12 = 0,33$.

Ответ: 0,33.

Задача 2. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение.

1-й способ.

Событие «хотя бы один автомат исправен» противоположно событию «оба автомата неисправны», вероятность которого равна $0,05 \cdot 0,05 = 0,0025$, так как они неисправны независимо друг от друга. Тогда искомая вероятность равна $1 - 0,0025 = 0,9975$.

Ответ: 0,9975.

2-й способ.

Обозначим через A_1 и A_2 события «исправен первый» и «исправлен второй» автоматы соответственно. Тогда $P(A_1) = P(A_2) = 1 - 0,05 = 0,95$. Искомая вероятность равна $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0,95 + 0,95 - 0,95 \cdot 0,95 = 0,9975$.

Ответ: 0,9975.

3-й способ.

Составим таблицу всех возможных результатов работы двух автоматов:

		Второй автомат	
		исправен, $P = 0,95$	неисправен, $P = 0,05$
Первый автомат	исправен, $P = 0,95$	$0,95 \cdot 0,95 = 0,9025$	$0,95 \cdot 0,05 = 0,0475$
	неисправен, $P = 0,05$	$0,05 \cdot 0,95 = 0,0475$	$0,05 \cdot 0,05 = 0,0025$

Числа в ячейках получаются по принципу таблицы умножения, так как вероятности поломки автоматов не зависят друг от друга.

Событие «хотя бы один автомат исправен» представляет собой объединение событий, которым соответствуют выделенные ячейки. Все эти события попарно несовместны, следовательно, искомая вероятность равна $0,9025 + 0,0475 + 0,0475 = 0,9975$.

Ответ: 0,9975.

Задача 3. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция» нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент А. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5. Найдите вероятность того, что А. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение.

1-й способ.

Обозначим через M событие «абитуриент А. получил на ЕГЭ по математике не менее 70 баллов», а через R , L и O — получил необходимые баллы по русскому языку, иностранному языку и обществознанию соответственно. Тогда искомая вероятность равна $P(M \cap R \cap (L \cup O)) = P(M) \cdot P(R) \cdot P(L \cup O) =$
 $= 0,6 \cdot 0,8 \cdot (0,7 + 0,5 - 0,7 \cdot 0,5) = 0,408.$

Ответ: 0,408.

2-й способ.

Будем говорить, что соответствующий предмет сдан, если А. набрал не менее 70 баллов на ЕГЭ по этому предмету. Чтобы поступить хотя бы на одну из двух специальностей надо обязательно сдать математику и русский язык. Соответствующие вероятности даны в условии. Кроме того, ещё надо сдать иностранный язык или обществознание. Чтобы найти вероятность этого события составим таблицу вероятностей:

		Обществознание	
		сдал, $P = 0,5$	не сдал, $P = 0,5$
Иностранный язык	сдал, $P = 0,7$	$0,7 \cdot 0,5 = 0,35$	$0,7 \cdot 0,5 = 0,35$
	не сдал, $P = 0,3$	$0,3 \cdot 0,5 = 0,15$	$0,3 \cdot 0,5 = 0,15$

Событие «сдал ЕГЭ по иностранному языку или обществознанию» представляет собой объединение событий, которым соответствуют выделенные ячейки. Все эти события попарно несовместны, следовательно, искомая вероятность равна $0,35 + 0,35 + 0,15 = 0,85$.

Таким образом, вероятность поступить на одну из двух специальностей равна произведению соответствующих вероятностей $0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 0,408$.

Ответ: 0,408.

Задача 4. Вероятность того, что новая кофемолка прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что она прослужит больше двух лет, равна 0,81. Найдите вероятность того, что кофемолка прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение.

1-й способ.

Обозначим через A событие «кофемолка прослужит больше года, но меньше двух лет», через B событие «кофемолка прослужит больше двух лет». События A и B несовместны (кофемолка не может прослужить меньше двух лет и одновременно больше двух лет). Объединением событий A и B является событие $A \cup B$ «кофемолка прослужит больше года». По условию $P(A \cup B) = 0,93$, $P(B) = 0,81$. Так как A и B несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, откуда $P(A) = P(A \cup B) - P(B) = 0,93 - 0,81 = 0,12$.

2-й способ.

Будем рассуждать о том, когда может сломаться кофемолка. Она может сломаться уже на первом году работы, может сломаться на втором году работы, а может проработать более двух лет и сломаться потом. Будем заполнять следующую таблицу:

Событие	сломалась на первом году	сломалась на втором году	сломалась после двух лет работы
Вероятность			

Так как вероятность события «кофемолка прослужит больше года» равна 0,93, то вероятность противоположного события «кофемолка сломалась на первом году» равна $1 - 0,93 = 0,07$. Вероятность события «кофемолка сломалась после первых двух лет работы» по условию равна 0,81. Вносим найденные значения в таблицу:

Событие	сломалась на первом году	сломалась на втором году	сломалась после двух лет работы
Вероятность	0,07		0,81

В таблице перечислены три несовместных события, одно из которых обязательно произойдёт. Поэтому сумма вероятностей в таблице должна быть равна 1. Следовательно, незаполненное искомое значение можно вычислить как $1 - 0,07 - 0,81 = 0,12$.

Ответ: 0,12.

Задача 5. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 24-х пассажиров, равна 0,57. Вероятность того, что окажется меньше 17-ти пассажиров, равна 0,28. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 17 до 23.

Решение.

В таблице укажем все возможные количества пассажиров и соответствующие вероятности:

Пассажиров, n	$n < 17$	$17 \leq n \leq 23$	$n \geq 24$
Вероятность			

Так как вероятность события «пассажиров в автобусе меньше 24» равна 0,57, то вероятность противоположного события «пассажиров в автобусе **не** меньше 24» равна $1 - 0,57 = 0,43$. Вероятность события «пассажиров в автобусе меньше 17» по условию равна 0,28. Вносим найденные значения в таблицу:

Пассажиров, n	$n < 17$	$17 \leq n \leq 23$	$n \geq 24$
Вероятность	0,28		0,43

В таблице перечислены три несовместных события, одно из которых обязательно произойдёт. Поэтому сумма вероятностей в таблице должна быть равна 1. Следовательно, незаполненное искомое значение можно вычислить как $1 - 0,28 - 0,43 = 0,29$.

Ответ: 0,29.

Задача 6. Ковбой Билл попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Билл стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,25. На столе лежит 5 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Билл видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Билл попадёт в муху.

Решение.

1-й способ.

Так как из 5 револьверов 2 пристреляны, то вероятность схватить пристрелянный револьвер равна $\frac{2}{5} = 0,4$. Вероятность схватить один из трёх непрестрелянных револьверов равна $\frac{3}{5} = 0,6$.

Обозначим через A событие «Билл схватит пристрелянный револьвер и попадёт из него в муху». Так как события «Билл схватит пристрелянный револьвер» и «Билл попадёт из пристрелянного револьвера в муху» независимы, то $P(A) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32$. Аналогично вероятность события B «Билл схватит непрестрелянный револьвер и попадёт из него в муху» равна $P(B) = 0,6 \cdot 0,25 = 0,15$. События A и B несовместны (Билл не может одновременно стрелять как из пристрелянного, так и из непрестрелянного револьвера). Искомая вероятность равна

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,32 + 0,15 = 0,47.$$

Ответ: 0,47.

2-й способ.

Составим таблицу всех возможных результатов стрельбы:

		Выбор револьвера	
		пристрелянный, $P = 0,4$	непристрелянный, $P = 0,6$
Результат стрельбы	попал (из пристрелянного $P = 0,8$, из непристрелянного $P = 0,25$)	$0,8 \cdot 0,4 = 0,32$	$0,25 \cdot 0,6 = 0,15$
	не попал	$1 - 0,32 = 0,68$	$1 - 0,15 = 0,85$

Так как Билл не может одновременно стрелять как из пристрелянного, так и из непристрелянного револьвера, то искомая вероятность равна $0,32 + 0,15 = 0,47$.

Ответ: 0,47.

Задача 7. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 60% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 40% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 48% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение.

1-й способ.

Пусть x — искомая вероятность. Пусть всего закуплено n яиц. Тогда в первом хозяйстве закуплено $x \cdot n$ яиц, из них $0,6x \cdot n$ высшей категории. Во втором хозяйстве закуплено $(1 - x) \cdot n$ яиц, из них $0,4 \cdot (1 - x) \cdot n$ высшей категории. Всего высшую категорию имеют $0,48n$ яиц. Отсюда

$$0,6x \cdot n + 0,4 \cdot (1 - x) \cdot n = 0,48n,$$

$$0,6x + 0,4 \cdot (1 - x) = 0,48,$$

$$0,6x + 0,4 - 0,4x = 0,48,$$

$$0,2x = 0,08,$$

$$x = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

2-й способ.

Пусть x — количество яиц, закупленных в первом хозяйстве, а y — во втором. Используя условие задачи, составим таблицу:

	Высшей категории	Остальных категорий
Первое хозяйство	$0,6x$	$0,4x$
Второе хозяйство	$0,4y$	$0,6y$
Всего по категориям	$0,6x + 0,4y$	$0,4x + 0,6y$
Всего яиц	$x + y$	

Вероятность того, что купленное яйцо окажется из первого хозяйства равна $p = \frac{x}{x + y}$. Так как высшую категорию получает 48% яиц, то получим уравнение:

$$\frac{0,6x + 0,4y}{x + y} = 0,48.$$

$$\frac{0,2x + 0,4(x + y)}{x + y} = 0,48;$$

$$0,2p + 0,4 = 0,48;$$

$$p = \frac{0,48 - 0,4}{0,2} = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

Задача 8. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,22. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение.

1-й способ.

Так как $0,4 \cdot 0,4 \neq 0,22$, то события «кофе закончился в 1-ом автомате» и «кофе закончился во 2-ом автомате» зависимые. Обозначим через A событие «кофе остался в первом автомате», через B — «кофе остался во втором автомате». Тогда $P(A) = P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$. Событие «кофе остался хотя бы в одном автомате» — это $A \cup B$, его вероятность равна $P(A \cup B) = 1 - 0,22 = 0,78$, так как оно противоположно событию «кофе закончился в обоих автоматах». По формуле для пересечения событий:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,6 - 0,78 = 0,42.$$

2-й способ.

Обозначим через X событие «кофе закончился в первом автомате», через Y — «кофе закончился во втором автомате». Тогда по условию $P(X) = P(Y) = 0,4$, $P(X \cap Y) = 0,22$. Так как $P(X \cap Y) \neq P(X) \cdot P(Y)$, то события X и Y зависимые. По формуле для объединения событий:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0,4 + 0,4 - 0,22 = 0,58.$$

Мы нашли вероятность события $X \cup Y$ «кофе закончился хотя бы в одном автомате». Противоположным событием будет

$\overline{X \cup Y}$ «кофе остался в обоих автоматах», его вероятность равна $P(\overline{X \cup Y}) = 1 - P(X \cup Y) = 1 - 0,58 = 0,42$.

3-й способ.

Составим таблицу вероятностей возможных результатов в конце дня.

		<i>Второй автомат</i>	
		кофе закончился	кофе остался
<i>Первый автомат</i>	кофе закончился	0,22	
	кофе остался		

По условию вероятность события «кофе закончился в обоих автоматах» равна 0,22. Это число мы сразу записали в соответствующую ячейку таблицы.

В первом автомате кофе закончится с вероятностью 0,4, поэтому сумма чисел в верхних ячейках таблицы должна быть равна 0,4. Значит, в правой верхней ячейке должно быть число $0,4 - 0,22 = 0,18$.

		<i>Второй автомат</i>	
		кофе закончился	кофе остался
<i>Первый автомат</i>	кофе закончился	0,22	0,18
	кофе остался		

Во втором автомате кофе закончится с вероятностью 0,4, поэтому сумма чисел в левых ячейках таблицы также должна быть равна 0,4. Значит, в левой нижней ячейке должно быть число $0,4 - 0,22 = 0,18$.

		<i>Второй автомат</i>	
		кофе закончился	кофе остался
<i>Первый автомат</i>	кофе закончился	0,22	0,18
	кофе остался	0,18	

Так как сумма чисел во всех четырёх ячейках должна быть равна 1, то искомое число в правой нижней ячейке равно $1 - 0,22 - 0,18 - 0,18 = 0,42$.

		<i>Второй автомат</i>	
		кофе закончился	кофе остался
<i>Первый автомат</i>	кофе закончился	0,22	0,18
	кофе остался	0,18	0,42

Ответ: 0,42.

Задача 9. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причем погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,9 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 11 марта, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 14 марта в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение.

1-й способ.

Составим таблицу вероятностей для погоды в Волшебной стране.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1			
отличная	0			

Погода 12 марта с вероятностью 0,9 останется хорошей, с вероятностью 0,1 станет отличной. Занесём эти данные в таблицу.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9		
отличная	0	0,1		

Хорошая погода 13 марта может быть в двух случаях.

1) Погода 12 марта была хорошей и не изменилась. Вероятность этого равна $0,9 \cdot 0,9 = 0,81$.

2) Погода 12 марта была отличной и изменилась. Вероятность этого равна $0,1 \cdot 0,1 = 0,01$.

Таким образом, вероятность хорошей погоды 13 марта равна $0,81 + 0,01 = 0,82$. Вероятность отличной погоды 13 марта равна $1 - 0,82 = 0,18$. Заносим эти данные в таблицу.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9	0,82	
отличная	0	0,1	0,18	

Отличная погода 14 марта может быть в двух случаях.

1) Погода 13 марта была хорошей и изменилась. Вероятность этого равна $0,82 \cdot 0,1 = 0,082$.

2) Погода 13 марта была отличной и не изменилась. Вероятность этого равна $0,18 \cdot 0,9 = 0,162$.

Таким образом, вероятность отличной погоды 14 марта равна $0,082 + 0,162 = 0,244$.

	11 марта	12 марта	13 марта	14 марта
хорошая	1	0,9	0,82	
отличная	0	0,1	0,18	0,244

Ответ: 0,244.

2-й способ.

Изобразим в таблице всевозможные варианты погоды, которые удовлетворяют условию (погода 14 марта отличная). Буква «Х» означает хорошую погоду в этот день, а буква «О» — отличную. Также добавим в таблицу соответствующие вероятности.

11 марта	12 марта	13 марта	14 марта	Вероятность
Х	Х	Х	О	$0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,081$
Х	Х	О	О	$0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,081$
Х	О	Х	О	$0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,001$
Х	О	О	О	$0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,081$

Так как в последнем столбце таблицы указаны вероятности несовместных событий, то искомая вероятность равна $0,081 + 0,081 + 0,001 + 0,081 = 0,244$.

Ответ: 0,244.

3-й способ.

Обозначим через I событие «в этот день погода изменилась по сравнению с предыдущим днём», а через H — «в этот день погода не изменилась». Тогда вероятность того, что 14 марта установится отличная погода равна

$$\begin{aligned} P((H \cap H \cap I) \cup (H \cap I \cap H) \cup (I \cap I \cap I) \cup (I \cap H \cap H)) &= \\ = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 + 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,9 &= \\ = 0,081 + 0,081 + 0,001 + 0,081 = 0,244. \end{aligned}$$

Ответ: 0,244.

Принципы составления таблиц вероятностей

В таблице (или в отдельных ее строках или столбцах) должны быть указаны вероятности всех возможных исходов опыта.

Все события, вероятности которых указаны в таблице должны быть попарно несовместны.

Спасибо за внимание!

www.legionr.ru