**Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
«Чебоксарский техникум технологии питания и коммерции» Чувашской Республики
Министерства образования и молодёжной политики Чувашской Республики**

Анисимова Наталия Ивановна

Методический комплект
(карточки-консультанты)

для организации самостоятельной работы по дисциплине

«Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия»

(Разделы: Алгебра, математический анализ)

Чебоксары, 2020 г.

Методический комплект (карточки-консультанты) для организации самостоятельной работы по дисциплине «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» (Разделы: Алгебра, математический анализ) рассмотрен на заседании ЦК преподавателей естественнонаучных дисциплин и рекомендован к использованию на уроках математики.
(Протокол № 5 от 15.01.2020 г.)

В данной методической разработке представлены карточки-консультанты по алгебре и началам анализа для организации самостоятельной работы студентов на уроках математики как при закреплении изученного ранее материала в ходе выполнения различных заданий, так и для самостоятельного изучения приемов решения типовых задач по математике.

В работе представлено большое количество примеров с подробным объяснением, задания для самостоятельной работы и задания для контроля усвоения материала.

Методическое пособие адресовано преподавателям и студентам.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В свете требований новых ФГОС самостоятельная работа студентов составляет основу современного образования. При этом специфика данной формы обучения является сложной проблемой в организации учебного процесса студентов.

Самостоятельная работа создает условия для формирования у студентов готовности и умения использовать полученные знания с целью выполнения работы.

В процессе преподавания математики можно прийти к выводу, что для большинства студентов является **проблемой** самостоятельное изучение многих тем по учебникам. Зачастую, учебники по математике написаны научным языком, который в большинстве своем не понятен студентам. В свете требований ФГОС возникла необходимость облегчить этот язык, сделать восприятие материала доступным для изучения.

Целью методической разработки является создание комплекта карточек-консультантов для помощи студентам при изучении и отработке навыков решения типовых задач по математике, более прочного закрепления знаний посредством самостоятельной работы, а преподавателям в организации более эффективной самостоятельной работы.

Для реализации данной цели были решены и решаются следующие **задачи:**

- систематизация теоретического материала: задания и примеры по математике по каждой теме были разбиты на несколько основных типов;
- систематизация практических заданий: подобраны примеры с решениями по каждому типу для самостоятельного изучения или повторения студентами; подобраны примеры для самостоятельного решения студентами примеров каждого типа; подобраны примеры для проверки преподавателем усвоенных знаний;

- добиться более осознанного изучения математики студентами, в связи с этим язык подачи материала был упрощен, насколько позволяет математическая наука;

Гипотеза: Предполагаю, что данные карточки-консультанты помогут студентам в изучении и отработки навыков решения математических задач, а преподавателям организовать самостоятельную работу на уроках.

При составлении карточек – консультантов были использованы различные сборники задач, откуда брались некоторые задания и многие задачи составлялись самостоятельно.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ЗАЯВЛЕННОЙ ТЕМЫ

Как уже отмечалось, в свете требований новых ФГОС самостоятельная работа студентов составляет основу современного образования. При этом специфика данной формы обучения является сложной проблемой в организации учебного процесса студентов. А как на уроках математики разнообразить самостоятельную работу? А как научить каждого студента решать задачи?

Все научные идеи витают в воздухе, зачастую, над одной проблемой одновременно начинают работать независимо друг от друга ученые разных стран.

В данной работе нашли отражение две идеи, которые не являются новыми, но которые актуальны как никогда. Первая идея-систематизация информации. Во многих учебных пособиях и многие преподаватели в своей работе задачи делят на основные типы, и обучение ведут, делая упор на эти типы, т.к. имея технический склад ума, преподаватели математики понимают, что такое изложение материала является наиболее целесообразным. Разбивая на типы, проще научить студентов решению базовых задач. Еще в 70-ые годы прошлого века математик В.Ф. Шаталов обнародовал авторскую методику обучения математики, в которой каждый ученик сначала обучался решению типовых задач.

Некоторые преподаватели такие типовые задачи используют для разработки подобных карточек, которые каждый называет по - своему.

Вторая идея - в еще большей мере вовлечь студентов в самостоятельную работу. Но при этом организация самостоятельной работы на уроке математики является достаточно сложной проблемой. Этому способствует и недостаточная подготовка студентов и сложный язык изложения материала в учебниках. Поэтому для реализации этой идеи в карточках-консультантах была облегчена подача теоретического материала, чтобы с ними мог работать каждый студент.

Методическая разработка может быть предназначена:

1) для обучения самостоятельному решению по только что изученному материалу, для его повторения и закрепления;
2) для самостоятельного изучения нового материала;
3) для подготовки к промежуточной и итоговой аттестации;
4) для обучения на дому, если студент долгое время не посещает учебных занятий.

ГЛАВА II.ОБОБЩЕНИЕ ОПЫТА РАБОТЫ ПО РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДИЧЕСКОЙ РАЗРАБОТКИ

Карточками – консультантами я пользуюсь не один год. Работа по ним очень удобна на уроках закрепления нового материала, на уроках обобщающего повторения при подготовке к промежуточной и итоговой аттестации, для того, чтобы студенты закрепили решение основных типов задач. Так же эти карточки я даю студентам, пропустившим объяснение новой темы, и они, работая по ней, в последующем, справляются с заданиями. Работа по карточкам нравится и студентам. Часто, если кто - то что - то недопонял, они просят у меня карточку. Более легкие темы даю и для самостоятельного изучения.

У меня два вида карточек – консультантов: карточки с уравнениями и неравенствами и карточки по другим темам. При объяснении решений уравнений и неравенств я изначально стараюсь сконцентрировать внимание на основных типах. Добиваюсь того, чтобы с первого взгляда на уравнение или неравенство студент видел тип уравнения или неравенства и способ решения, т.к. более сложное уравнение можно привести к более простому, которое относится к тому или иному типу. Второй вид карточек - базовые примеры по другим темам, не содержащим уравнения и неравенства.

Как происходит работа на уроке по карточкам – консультантам?

После изучения очередной темы, после совместной работы над задачами, перед контрольной работой, зачетом или на уроках подготовки к промежуточной или итоговой аттестации, каждому раздается карточка консультант.

1.Первая часть – представлены разобранные примеры с решением и объяснением, которые не усложнены излишним теоретическим материалом, т.к. теория была изучена до этого;

2.Вторая часть содержит задачи для самостоятельного решения (по вариантам).

В ходе работы над карточкой студенты при необходимости обращаются ко мне, если что - то недопоняли из п.1или для того, чтобы я проверила правильность решения заданий из п.2. Эта работа занимает, обычно, один урок. На втором уроке проводится самостоятельная работа по подобным примерам. Слабым учащимся разрешено пользоваться карточками.

В данной методической разработке к каждой карточке дается небольшая самостоятельная работа, позволяющая преподавателю провести контроль знаний студентов.

Карточки представлены по разным темам, разным видам:

- корни-вычисления (разобраны примеры решения простейших задач и примеров среднего уровня);
- степени - вычисления (разобраны примеры решения простейших задач и примеров среднего уровня);
- показательные уравнения (разобраны примеры решений уравнений по типам);
- логарифмические неравенства (разобраны примеры решений уравнений по типам);
- первообразная (разобраны примеры нахождения первообразных)
- площадь криволинейной трапеции и площадь фигур, ограниченных графиками функций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение математики направлено на овладение системой математических знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности. Занятие математикой учит обобщать, анализировать, логически мыслить, находить закономерности во всех сферах деятельности человека. Приближая математику к студенту, вызывая интерес к предмету, мы способствуем развитию студентов, воспитанию высококлассных специалистов. А интерес появляется тогда, когда, студент справляется с заданиями. Карточки-консультанты помогают понять математику, не отталкивают своей сложностью, но и не расслабляют студентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1) М. И. Башмаков. Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования М.: Издательский центр «Академия», 2013 г.

2) М. И. Башмаков. Математика: Задачник М.: Издательский центр «Академия», 2013 г.

3) М. И. Башмаков. Математика. (базовый уровень): учебник для 10 класса М.: Издательский центр «Академия», 2014 г.

4) В. А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. Математика. Для профессий и специальностей социально-экономического профиля: Учебник. М.: Издательский центр «Академия», 2013 г.

5) Б.М.Ивлев, С.М.Саакян, С.И.Шварцбурд. Дидактические материалы по алгеьре и началам анализа для 11 класса. М.»Просвещение» 2013

6) Л.И. Мартышова. Открытые уроки алгебры и начала анализа. М.: «ВАКО», 2012

Приложения

Карточки консультанты

Тема «Корни-вычисления»

$\sqrt[5]{243} = 3$, т. к $3^5 = 243$; $\sqrt[3]{-27} = -3$, т. к $(-3)^3 = -27$; $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$, т. к $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Для любого натурального $\mathbf{n}$ ***, целого*** $\mathbf{k}$ ***и любых неотрицательных чисел*** $\boldsymbol{a}$ ***и*** $\mathbf{b}$ ***выполнены равенства:*** ***1.*** $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$***.*** ***2.*** $\sqrt[n]{\frac{a}{d}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$	***3.*** $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ ***(k > 0).*** ***4.*** $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ $(k > 0)$***.*** ***5.*** $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ ***(если*** $k \leq 0$, то $a \neq 0$) ***6. Для любых чисел*** $\boldsymbol{a}$ ***и*** $\mathbf{b}$***, таких, что 0***$\leq a < b$***, выполняется неравенство*** $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$***.***
1.**Вычислить: 1)** $\sqrt[5]{32} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{-216} =$ $2 + \frac{1}{3} \cdot (-6) = 2 - 2 = 0$. **2)**$\sqrt[5]{0,00001} - \left(2\sqrt[7]{-3}\right)^7 =$ 0,1 - 2^7 · (-3)= 0,1+128·3 = 0,1 + 384 = 384,1. **3)**$\sqrt[8]{(-5)^8} + 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = 5 + 5 \cdot \frac{1}{5} = 5 + 1 = 6$.	**4)**$\sqrt{\sqrt[3]{64}} - \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} =$ $\sqrt[6]{64} - \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = 2 - \sqrt[3]{27} = 2 - 3 = -1$. **5)**$\sqrt[3]{0,09} \cdot \sqrt[3]{0,3} + \sqrt[5]{\sqrt{1024}} =$ $\sqrt[3]{0,09 \cdot 0,3} + \sqrt[10]{1024} = \sqrt[3]{0,027} + 2 = 0,3 + 2 = 2,3$.

Вычислить самостоятельно: 1) $\sqrt[3]{-125} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{256}$; 2) $\left(3\sqrt[3]{5}\right)^3 + \sqrt[6]{0,000001}$; 3) $\sqrt[10]{(-3)^{10}} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt{256}} - \frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$; 5) $\sqrt[3]{250} \cdot \sqrt[3]{4}$

При решении уравнений помним: если неизвестная в четной степени, то уравнение $x^n = a$ ***может иметь или 2 корня (если а*** > 0***) или 1 корень (если а = 0), или не иметь корней***
(если а< 0***). Если неизвестная в нечетной степени, то уравнение*** $x^n = a$ ***всегда имеет 1 корень.***

2. Решить уравнения: **1)**$x^3 = -27$; $x = \sqrt[3]{-27} = -3$. Ответ: -3.	**2)**$x^4 = 81$**;** $x_{1,2} = \pm 3$. Ответ:± 3.	**3)**$2x^7 + 12 = 0$; $x^7 = -\frac{12}{2}$; $x^7 = -6$; $x = \sqrt[7]{-6}$; $x = -\sqrt[7]{6}$. Ответ: $-\sqrt[7]{6}$.	**4)** $3x^4 + 27 = 0$; $3x^4 = -27$; $x^4 = -9$. Ответ: корней нет.

Решить уравнения: 1) $x^5 = -32$; 2) $2x^4 - 32 = 0$; 3) $x^6 + 64 = 0$; 4) $3x^5 - 15 = 0$.

3.Сравните числа $\sqrt[3]{10}$ **и** $\sqrt[4]{15}$**.**

Решение: Преобразуем оба корня. Приведем к общему показателю 12 по свойству 5.

$\sqrt[3\cdot4]{10^4}$ и $\sqrt[4\cdot3]{15^3}$; $\sqrt[12]{10000}$ и $\sqrt[12]{3375}$. Т.к 10000>3375, то $\sqrt[12]{10000} > \sqrt[12]{3375}$ =>

$\sqrt[3\cdot 4]{10^4} \ > \ \sqrt[4\cdot 3]{15^3}$.

Решить самостоятельно: *Сравнить числа*: $\sqrt{10}$ и $\sqrt[3]{30}$.

4.а) Внесите множитель под знак корня $5\sqrt[3]{4}$.

Решение: Т.к. показатель корня «3», то число «5» вносится как 5^3. $5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{500}$.

б) Вынесите множитель из под знака корня $\sqrt[3]{\mathbf{625}} = \sqrt[3]{125 \cdot 5} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$.

Решить самостоятельно: 1) Внесите множитель под знак корня $3\sqrt[5]{2}$;

2) Вынесите множитель из под знака корня $\sqrt[5]{160}$; 3) Упростите выражение $\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}$.

5.Вычислить: $\frac{\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$. Решение: Воспользуемся свойством: если корни одинаковой степени, то при умножении и делении можно все внести под один корень: $\sqrt[5]{\frac{10\cdot 16}{5}}$.

Сократим выражение, стоящее под корнем $\sqrt[5]{2 \cdot 16} = \sqrt[5]{32} = 2$.

Решить самостоятельно: Вычислить: $\frac{\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{36}}{\sqrt[4]{4}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант	2 вариант
1.Найти значение выражения: $\sqrt[4]{0{,}0016} + \sqrt[3]{-0{,}008} + \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} + 2\sqrt{0{,}25}$. 2.Вычислить: а) $\sqrt[5]{243 \cdot 32}$; б) $\sqrt[8]{\frac{128}{0{,}5}}$; в) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{24}$; г) $\left(-2\sqrt[4]{5}\right)^4$; д) $\sqrt[3]{125} - 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{81}{16}}$ 3. Вычислить: $а)\sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{125}$; $б)\left(\sqrt[5]{2}\right)^5 - \sqrt[3]{0{,}001}$;$в)\sqrt[4]{(-3)^4} + 3\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; $г)\sqrt{\sqrt[3]{64}} + \frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$; $д)\sqrt[4]{0{,}001} \cdot \sqrt[4]{0{,}1} + \sqrt[3]{5^6}$ 4.Сравнить числа $\sqrt{6}$ и $\sqrt[4]{35}$.	1.Найти значение выражения: $\sqrt[3]{0{,}027} + \sqrt[4]{0{,}0256} + \sqrt[5]{-\frac{1}{243}} + 2{,}5\sqrt{0{,}16}$. 2. Вычислить: а) $\sqrt[3]{125 \cdot 216}$; б) $\frac{\sqrt[4]{405}}{\sqrt[4]{5}}$ в) $\sqrt[3]{54 \cdot 4}$; г) $\left(-2\sqrt[5]{5}\right)^5$; д) $\sqrt[4]{256} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ 3.Вычислить: $а)\sqrt[6]{64} + \sqrt[3]{-27}$; $б)\left(\sqrt[4]{2}\right)^4 - \sqrt[4]{0{,}0001}$;$в)\sqrt[6]{(-3)^6} + 3\sqrt[4]{}$ $г)\sqrt{\sqrt[3]{64}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$;$д)\sqrt[3]{0{,}04} \cdot \sqrt[3]{0{,}2} + \sqrt[4]{3^8}$ 4.Сравнить числа $\sqrt[8]{63}$ и $\sqrt[4]{8}$.

1 вариант	2 вариант
1. Вычислить:	1.Вычислить:

<table>
<tr>
<td>

$а)\sqrt[4]{81}+\sqrt[3]{125};\ б)\left(\sqrt[5]{2}\right)^5-\sqrt[3]{0,001};$

$в)\sqrt[4]{(-3)^4}+3\sqrt[3]{\frac{8}{27}};$

$г)\sqrt{\sqrt[3]{64}}+\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}};$

$д)\sqrt[4]{0,001}\cdot\sqrt[4]{0,1}+\sqrt[3]{5^6}$

2. Решите уравнение:

$а)x^4=625;\ б)2x^3+14=0$

3. Сравните числа: $\sqrt[3]{2}$ $и$ $\sqrt{1}$

4. а) Внесите множитель под знак корня: $2\sqrt[3]{7}$

б) Вынесите множитель из – под знака корня: $\sqrt[4]{32}$

</td>
<td>

$а)\sqrt[6]{64}+\sqrt[3]{-27};\ б)\left(\sqrt[4]{2}\right)^4-\sqrt[4]{0,0001};$

$в)\sqrt[6]{(-3)^6}+3\sqrt[4]{\frac{16}{81}};$

$г)\sqrt{\sqrt[3]{64}}+\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}};$

$д)\sqrt[3]{0,04}\cdot\sqrt[3]{0,2}+\sqrt[4]{3^8}$

2.Решите уравнение:

$а)x^6=64;\ б)3x^5+15=0$

3.Сравните числа: $\sqrt[4]{3}$ $и$ $\sqrt{4}$

4. а) Внесите множитель под знак корня: $3\sqrt[4]{2}$

б) Вынесите множитель из – под знака корня: $\sqrt[3]{81}$

</td>
</tr>
</table>

Тема: Степени вычисления

$\boldsymbol{a^b}$ $\boldsymbol{a}$ $-$ основание $\boldsymbol{b}$ $-$ показатель

1.Если показатель дробное число, то основание уменьшаем. Например: 16 = $\mathbf{2^4}$***;*** $\mathbf{125=5^3}$

2.Если показатель – отрицательное число, то: «-» убираем, основание переворачиваем (заменяем обратным числом)

3.Свойства степеней можем применить при умножении и делении, если одинаковые показатели или одинаковые основания.

1. 1) $\mathbf{121^{\frac{1}{2}}}$**.** Т.к. показатель – дробное число, то основание уменьшаем: $(11^2)^{\frac{1}{2}}$. При возведении в степень показатели перемножаются. Получим $11^{2\cdot\frac{1}{2}}=11^1=11$.

2) $\mathbf{3\cdot 64^{\frac{1}{3}}}=3\cdot(4^3)^{\frac{1}{3}}=3\cdot 4^1=12$.

3) $\mathbf{2\cdot 0,0001^{-\frac{3}{4}}}=2\cdot(0,1^4)^{-\frac{3}{4}}=2\cdot(0,1)^{-3}=2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}=2\cdot 10^3=2\cdot 1000=2000$.

Решить самостоятельно: а) $8^{\frac{2}{3}}$; б) $-8\cdot 27^{\frac{1}{3}}$; в) $5\cdot 0,008^{-\frac{2}{3}}$.

2.Вычислить: 1) $\mathbf{(3^{\frac{21}{4}}:3^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}}$ **.**

Р е ш е н и е: в скобках воспользуемся свойством $a^b:a^c=a^{b-c}$

$$\left(3^{\frac{21}{4}-\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{16}{4}})^{\frac{1}{2}}=3^2=9.$$

2) $\mathbf{3^8\cdot 9^{-3}}$. Р е ш е н и е: приведем к одному основанию «3». $3^8\cdot(3^2)^{-3}=3^8\cdot 3^{-6}=3^{8-6}=3^2$.

3) $\mathbf{625^{-2,25}\cdot 25^{-\frac{2}{3}}\cdot 125^{\frac{25}{9}}}$.

Р е ш е н и е: представим каждый множитель с основанием 5.

$$625^{-2,25}\cdot 25^{-\frac{2}{3}}\cdot 125^{\frac{25}{9}}=(5^4)^{-2,25}\cdot(5^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(5^3)^{\frac{25}{9}}=5^{4\cdot(-2,25)}\cdot 5^{-\frac{2}{3}\cdot 2}\cdot 5^{\frac{25}{9}\cdot 3}$$
$$=5^{-10}\cdot 5^{-\frac{4}{3}}\cdot 5^{\frac{25}{3}}=5^{-10-\frac{4}{3}+\frac{25}{3}}=5^{-10+7}=5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}=0,008.$$

4) $\mathbf{1,75^{\frac{1}{9}}\cdot 4^{\frac{2}{9}}\cdot 28^{\frac{8}{9}}}$.

Р е ш е н и е : представим все множители или с основаниями 4 и 7.Затем соберем вместе все множители с основанием 4 и все множители с основанием 7.

$$1{,}75^{\frac{1}{9}}\cdot 4^{\frac{2}{9}}\cdot 28^{\frac{8}{9}}=(\frac{7}{4})^{\frac{1}{9}}\cdot 4^{\frac{2}{9}}\cdot (4\cdot 7)^{\frac{8}{9}}=\frac{7^{\frac{1}{9}}\cdot 4^{\frac{2}{9}}\cdot 4^{\frac{8}{9}}\cdot 7^{\frac{8}{9}}}{4^{\frac{1}{9}}}=7^{\frac{9}{9}}\cdot 4^{\frac{9}{9}}=28$$

5) $\mathbf{35^0-(\frac{1}{16})^{-\frac{1}{4}}+5^{-2}}$. Р е ш е н и е: $35^0=1$; $(\frac{1}{16})^{-\frac{1}{4}}=16^{\frac{1}{4}}=(2^4)^{\frac{1}{4}}=2^1=2$; $\mathbf{5^{-2}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5^2}}=\frac{1}{25}$. Получим: $1-2+\frac{1}{25}=-1+0{,}04=-0{,}96$.

Решить самостоятельно: а) $2^6\cdot 4^{-2}$; б)$36^0-\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}+2^{-3}$; в) $46^0+27^{-\frac{1}{3}}+(\frac{1}{5})^{-2}$

3.Вычислить: а) $\frac{\mathbf{20^{\frac{3}{5}}}}{\mathbf{4^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{-\frac{2}{5}}}}=\frac{\mathbf{(4\cdot 5)^{\frac{3}{5}}}}{\mathbf{4^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{-\frac{2}{5}}}}=\frac{\mathbf{4^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{\frac{3}{5}}}}{\mathbf{4^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{-\frac{2}{5}}}}=\frac{\mathbf{5^{\frac{3}{5}}}}{\mathbf{5^{-\frac{2}{5}}}}=\mathbf{5^{\frac{3}{5}-(-\frac{2}{5})}=5^1=5}$.

б) $10^{\sqrt{5}-1}\cdot 10^{5-\sqrt{5}}=10^{\sqrt{5}-1+5-\sqrt{5}}=10^4=10000$.

***Решить самостоятельно*:** а) $\frac{24^{\frac{3}{7}}}{8^{\frac{3}{7}}\cdot 3^{-\frac{4}{7}}}$; б)$5^{\sqrt{3}-7}\cdot 5^{5-\sqrt{3}}$; в)$\frac{0{,}25^4\cdot 8^3}{2^5}$.

4. Найдите значение выражения $\left(\sqrt[18]{\mathbf{4^3\cdot 27^2}}\right)^{\mathbf{3}}$. Р е ш е н и е: приведем к основаниям «2» и «3»

$\left(\sqrt[18]{(2^2)^3\cdot(3^3)^2}\right)^3=.\left(\sqrt[18]{2^6\cdot 3^6}\right)^3=\left(\sqrt[18]{6^6}\right)^3$.Освободимся от корня по формуле $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

$\left(\sqrt[18]{6^6}\right)^3=(6^{\frac{6}{18}})^3=(6^{\frac{1}{3}})^3=6^1=6$.

Решить самостоятельно: $\frac{\sqrt[24]{2^{36}}}{\sqrt{2}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант	2 вариант
Вычислить: **1**.а) $16^{\frac{1}{2}}$; б) $25^{-\frac{1}{2}}$; в) $7\cdot 8^{\frac{1}{3}}$; г) $-5\cdot 0{,}001^{-\frac{2}{3}}$.	Вычислить: **1.**а) $9^{\frac{1}{2}}$; б) $36^{-\frac{1}{2}}$; в) $2\cdot 125^{\frac{1}{3}}$; г) $-4\cdot 0{,}01^{-\frac{3}{2}}$.
2. а) $\left(2^{\frac{12}{5}}\cdot 2^{\frac{8}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$; б) $5^8\cdot 125^{-3}$. **3**. а)$132^0-\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}+5^{-2}$; б) $\frac{15^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{2}{5}}\cdot 5^{-\frac{3}{5}}}$; в) $4^{\sqrt[3]{5}-1}\cdot 4^{3-\sqrt[3]{5}}$. **4.** $((\frac{3}{4})^0)^{-1{,}5}-7{,}5\cdot 4^{-\frac{3}{2}}-(-2)^{-4}+81^{\frac{1}{4}}$	**2.** а) $\left(3^{\frac{25}{6}}\cdot 3^{\frac{11}{6}}\right)^{\frac{1}{3}}$; б) $3^9\cdot 81^{-2}$. **3**. а)$314^0+\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{1}{5}}+2^{-2}$; б) $\frac{14^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}}\cdot 7^{\frac{3}{4}}}$; в) $4^{\sqrt[3]{5}-4}\cdot 4^{6-\sqrt[3]{5}}$. **4.** $0{,}027^{\frac{1}{3}}-(\frac{1}{6})^{-2}+256^{\frac{3}{4}}-3^{-1}+5{,}5^0$

5. Вычислить: а) $\frac{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[4]{216}}{\sqrt[12]{6}}$; б) $\frac{\sqrt[9]{7}\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$. **6**. Найти значение выражения $2\left(d^{\frac{1}{11}}\right)^{22}+7d^2$ при $d=2$.	**5.** Вычислить: а) $\frac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$; б) $\frac{\sqrt[15]{6}\sqrt[10]{6}}{\sqrt[6]{6}}$. **6**. Найти значение выражения $\frac{\left(b^{\frac{7}{12}}\right)^2}{b^{\frac{1}{6}}}$ при $b=16$.

Тема: Показательные уравнения

<table>
<tr><td colspan="4">I. Уравнения, приводимые к одному основанию.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Обе части уравнения приводим к одному основанию. При решении используются свойства: $a^0=1$; $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$</td></tr>
<tr>
<td>Примеры:
а) $4^{x^2+5x}=1$;
$4^{x^2+5x}=4^0$;
$x^2+5x=0$;
$x(x+5)=0$;
$x=0$ или
$x=-5$.
Ответ: 0; -5.
б) $4^{x^2-6}=64$;
$4^{x^2-6}=4^3$;
$x^2-6=3$;
$x^2=9$;
$x_{1,2}=\pm3$.
Ответ: ±3.</td>
<td>в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2x}=\frac{1}{16}$;
$\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2x}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$;
$5-2x=4$;
$-2x=-5+4$;
$x=0,5$.
Ответ: 0,5.
г) $4^x=8^{2x-3}$;
$4^x=8^{2x-3}$;
$2^{2x}=2^{3(2x-3)}$;
$2x=6x-9$;
$x=2\frac{1}{4}$.
Ответ: $2\frac{1}{4}$.</td>
<td>д) $3^{5-x^2}=\frac{1}{81}$;
$3^{5-x^2}=\frac{1}{81}$;
$3^{5-x^2}=3^{-4}$;
$5-x^2=-4$;
$-x^2=-9$;
$x^2=9$;
$x_{1,2}=\pm3$.
Ответ: ±3.</td>
<td>е) $3^{x^2-6x-2,5}=81\sqrt{3}$;
Решение: $81=3^4$, $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$ =>
$81\sqrt{3}=3^4\cdot3^{\frac{1}{2}}=3^{4,5}$,
Получим уравнение:
$3^{x^2-6x-2,5}=3^{4,5}$;
$x^2-6x-2,5=4,5$;
$x^2-6x-7=0$;
$x_{1,2}=-1;7$.
Ответ: -1; 7.</td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Решить самостоятельно: а) $3^{4-2x}=9$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+12}=\frac{1}{27}$; в) $5^{x^2-3x}=\frac{1}{25}$; г) $4^{x^2-1}=1$;
д) $9^{x-5}=27^{2x+1}$; е) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x+0,5}=\frac{\sqrt{7}}{7}$; ж) $0,25^{-2x-3}=8$.</td></tr>
</table>

II. Уравнения, решаемые вынесением общего множителя за скобки.	**IV. Уравнения, решаемые делением**
При решении используется свойство: $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$	$3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x$ Решение: Разделим обе части

Примеры:

а) $5^{2x+1}-3\cdot5^{2x-1}=550$**.**

Решение:

$5^{2x}\cdot5^1-3\cdot5^{2x}\cdot5^{-1}=550;$

$5^{2x}\cdot\left(5-3\cdot\frac{1}{5}\right)=550;$

$5^{2x}\cdot\frac{22}{5}=550;$

$5^{2x}=550:\frac{22}{5};$

$5^{2x}=125;$

$5^{2x}=5^3;$

$2x=3;$

$x=1{,}5.$

Ответ:1,5.

б) $3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}=13.$

Решение:

$3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}=13;$

$3^{x-3}(3^2+3+1)=13;$

$3^{x-3}\cdot13=13;$

$3^{x-3}=1;$

$3^{x-3}=3^0;$

$x-3=0;$

$x=3.$

Ответ: 3.

уравнения на на $36^x\neq0$

$3\cdot\left(\frac{16}{36}\right)^x+2\left(\frac{81}{36}\right)^x=5$

$3\left(\frac{4}{9}\right)^x+2\left(\frac{9}{4}\right)^x-5=0$

Обозначим $\left(\frac{4}{9}\right)^x=y$,получим

$3y+\frac{2}{y}-5=0;$

$3y^2-5y+2=0;$

$y_1=1, y_2=\frac{2}{3}$. Следовательно,

$\left(\frac{4}{9}\right)^x=1,$ или $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3}$,

$x=0.$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{2}{3}\right)^1,$

$2x=1,$

$x=\frac{1}{2}.$

Ответ: 0; $\frac{1}{2}$.

Решить самостоятельно: а) $5^{3x-2}+2\cdot5^{3x-1}=275;$ б) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}=448;$ 3) $3\cdot4^x+2\cdot9^x=5\cdot6^x.$

III.Уравнения, приводимые к квадратным

Примеры: а) $3^{2x}-10\cdot3^x+9=0$**:**

заменим $3^x=y$, $y>0$ тогда $3^{2x}=(3^x)^2=y^2$;

уравнение приводится к виду $y^2-10y+9=0$,

$y_1=1,$ $y_2=9;$

$3^x=1$ или $3^x=9;$

$x=0;$ $x=2.$

Ответ: 0; 2.

б) $2\cdot2^x+4^x=80$**.**

Пусть $2^x=y$, $y>0$; тогда $4^x=2^{2x}=y^2$;

Получим $2y+y^2=80$,

$y^2+2y-80=0$,

$y_1=-10$- не удовлетворяет условию $y>0$; $y_2=8$. Тогда $2^x=8$; $2^x=2^3$;$x=3$.

Ответ: 3.

Решить самостоятельно: а) $2^{2x}-5\cdot2^x-24=0;$ б) $4^x+2^x-6=0;$ в)$9^x+3^{x+1}=4.$

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант	2 вариант
1)$8^{5x-20}=1;$	1)$9^{2x+5}=1;$
2)$3^{4x+2}=81;$	2)$2^{4x-4}=16;$
3)$2^{15x-34}=\frac{1}{16};$	3)$5^{15x-33}=\frac{1}{125};$
4)$4^{2x-3}=\sqrt[3]{16};$	4)$7^{2x-3}=\sqrt[3]{7};$
5)$(0{,}1)^{x-4}=100;$	5)$(0{,}01)^{x-3}=1000;$
6)$2^{2x}-5\cdot2^x+4=0;$	6)$3^{2x}-4\cdot3^x+3=0;$
7) $3\cdot4^x-5\cdot2^x-2=0;$	7) $2\cdot9^x-5\cdot3^x-3=0;$

8) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 0{,}25^{-2}$; 9)$5^{x+1} + 5^{x} = 750$; 10)$8^{x} + 18^{x} - 2 \cdot 27^{x} = 0$.	8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1} = 75 \cdot 05^{-2}$; 9)$3^{x+2} + 3^{x} = 10$; 10)$6 \cdot 4^{x} - 13 \cdot 6^{x} + 6 \cdot 9^{x} = 0$.

Тема: Логарифмические неравенства

<table>
<tr><td colspan="2">При решении логарифмических неравенств:
1) ОДЗ решаем до конца.
2)Решаем само неравенство, учитывая основание логарифмов: если основание больше 1, то при освобождении от логарифмов знак неравенства не меняем; если основание положительное и меньше 1, то знак неравенства меняем.
3)Находим пересечение решений ОДЗ и неравенства.</td></tr>
<tr><td colspan="2">I.Неравенства, решаемые по определению логарифмов.</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{1.\log_2(x+1) > 3}$. ОДЗ: $x + 1 > 0,\ x > -1$.
Основание логарифма равно 2;
$2 > 1$, поэтому знак неравенства не меняем.
Получим:
x + 1$>$ 2^3;
x + 1$>$ 8;
x $>$ 7.
С учетом ОДЗ получаем ответ.
Ответ: x∈(7;+∞).</td><td>$\mathbf{2.\log_{\frac{1}{2}}(5-2x) > -3}$. ОДЗ: 5-2x > 0;
-2x > -5;
x $<$ 2,5.
Основание логарифма равно $\frac{1}{2}$;
$\frac{1}{2} < 1$, поэтому знак неравенства меняем.
5-2x $< \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; -2x $<$ 8-5; -2x $<$ 3;
x $>$ -1,5.С учетом ОДЗ получаем ответ.
Ответ: x∈(-1,5;2,5).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решить самостоятельно: а) $\log_{0,7}(x+5) < 0$; б) $\log_4(x-3) > 2$; в) $\log_2(x^2 - x - 12) < 3$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">II.Неравенства, решаемые потенцированием</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{1.\log_2(2x+1) > \log_2(x-1)}$.
ОДЗ: $\begin{cases}2x+1>0;\\ x-1>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x>-1;\\ x>1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-0{,}5;\\ x>1.\end{cases}$ <=>
$x > 1$.
Т.к. основание логарифма 2 > 1, то знак неравенства не меняем:
2x + 1 $>$ x - 1;
2x – x $> -1 - 1$;
x > -2.
С учетом ОДЗ получаем ответ.
Ответ: x∈(1;+∞).</td><td>$\mathbf{2.\log_{0,7}(2x-8) > \log_{0,7}(x-1)}$.
ОДЗ: $\begin{cases}2x-8>0;\\ x-1>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>4;\\ x>1.\end{cases} \Leftrightarrow x > 4$.
Т.к. основание логарифма 0,7$<$ 1, то знак неравенства меняем:
2x – 8 $<$ x –1;
2x–x $< 8 - 1$;
x$<$ 7.С учетом ОДЗ получаем ответ.
Ответ: x∈(4;7).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решить самостоятельно: а)$\log_3(5x-1) < \log_3(4x+3)$; б)$\log_3(5x-1) < \log_3(4x+3)$;
в) $\log_5(x^2 - 4x) > \log_5(3 - 2x)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">III.Неравенства, решаемые преобразованием по свойствам логарифмов.</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{1.\log_{\sqrt{5}}(4-x) + \log_{0,2}(4-x) < 1}$. ОДЗ:4-x$>$ 0;
-x > -4;
x $<$ 4.
Т.к. $\sqrt{5}$ = $5^{\frac{1}{2}}$; 0,2 = $\frac{1}{5} = 5^{-1}$.</td><td>$\mathbf{2.\log_5(x+2) + \log_5(x-2) > 1}$.
ОДЗ: $\begin{cases}x+2>0;\\ x-2>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-2;\\ x>2;\end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.
Для решения неравенства применим свойство:
$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$
$\log_5(x+2)(x-2) > 1$;</td></tr>
</table>

Используя свойство логарифмов

$$\log_{a^q} b = \frac{1}{q}\log_a b,$$

получим

$\log_{5^{\frac{1}{2}}}(4-x) + \log_{5^{-1}}(4-x) < 1;$

$2\log_5(4-x) - 1\log_5(4-x) < 1;$

$\log_5(4-x) < 1;$

$4 - x < 5^1;$

$4 - x < 5;$

$-x < 5 - 4;$

$-x < 1;$

$x > -1$.С учетом ОДЗ получим ответ.

Ответ: x∈(-1; 4).

$(x+2)(x-2) > 5^1;$

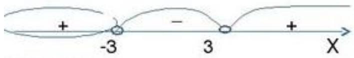
$x^2 - 4 > 5;$

$x^2 - 9 > 0.$

Решим неравенство методом интервалов. Найдем корни соответствующего уравнения:

$x^2 = 9;$

$x_{1,2} = \pm 3.$



$x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty).$

С учетом ОДЗ получим ответ.

Ответ:$x \in (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Решить самостоятельно: а) $\log_{\sqrt{3}}(x-5) - \log_3(x-5) < 4;$ б) $\log_3(x+4) + \log_3(x-4) > 2;$

в) $\lg x - \log_2(5x+1) < \lg x$.

IV.Квадратные неравенства

Решить неравенство: $\lg^2 x - \lg x - 2 \geq 0.$

Р е ш е н и е:

ОДЗ: $x > 0.$

Это логарифмическое неравенство решается методом замены переменной. Пусть $lgx = t$, тогда неравенство примет вид $t^2 - t - 2 \leq 0$. Для решения этого неравенства сначала найдем корни уравнения $t^2 - t - 2 = 0.$

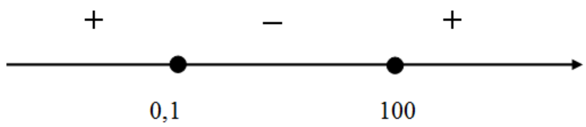
$$D = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9, \sqrt{D} = 3, t_1 = 2, t_2 = -1.$$

Сделаем обратную замену:

$lgx = 2 => x = 10^2 = 100.$

$lgx = -1 => x = 10^{-1} = 0{,}1.$

Отметим полученные корни на числовой оси и определим знаки исходного неравенства на каждом их промежутков.



Так как нас интересуют только те значения x, при которых данное неравенство принимает неотрицательные значения (знак неравенства ≥), то получаем, что $x \in (-\infty; 0{,}1] \cup [100; +\infty)$

С учетом ОДЗ получим $x \in (0; 0{,}1] \cup [100; +\infty)$.

Ответ: $x \in (0; 0{,}1] \cup [100; +\infty)$.

Решить самостоятельно: 1) $\lg^2 x + 3\lg x < 4$; 2) $\lg^2 x^2 + 3\lg x \geq 1$.

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант	2 вариант
Решите неравенства: 1.$\log_3(4 - 2x) \geq 1$; 2.$\log_\pi(3x + 2) \leq \log_\pi(x - 1)$; 3.$\log_{1/9}(6 - 0{,}3x) > -1$; 4. 6. $\log_4(x+3) + \log_4(x-3) \rangle 2$ 5. Найдите число целых отрицательных решений неравенства lg (x + 5) ≤2 – lg 2.	 1. $\log_{0,8}(0{,}25 - 0{,}1x) > -1$; 2. $\log_{1,25}(0{,}8x + 0{,}4) \leq -$ l ; 3. $\log_{10/3}(1 - 1{,}4x) < -1$; 4. $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) \rangle 3$; 5. Найдите число целых решений неравенства $\log_{0,5}$ (x - 2) ≥ - 2.

Тема «Первообразная»

$f(x)$	k	x^n	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	a^x	e^x	$\frac{1}{x}$
$F(x)+c$	$kx+c$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$2\sqrt{x}+c$	$-\cos x+c$	$\sin x+c$	$\operatorname{tg} x+c$	$-\operatorname{ctg} x+c$	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	e^x+c	$\ln\lvert x\rvert+c$

Если $f(x) = x^n$, то $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

1) $\boldsymbol{f(x) = x^3}$;
$F(x) = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$

2) $\boldsymbol{f(x) = x^{1,3}}$;
$F(x) = \frac{x^{1,3+1}}{1,3+1} + C = \frac{x^{2,3}}{2,3} + C.$

3) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x}}$; Преобразуем функцию, используя формулу $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, тогда
$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C.$

4) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x^2}}$; Преобразуем функцию, используя формулу $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.
$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, тогда
$F(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C.$

Решить самостоятельно: Найти общий вид первообразных функций: 1)$f(x) = x^8$; 2)$f(x) = x^{4,3}$; 3)$f(x) = \sqrt[5]{x}$; 4)$f(x) = \sqrt[7]{x^3}$.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^n} \qquad F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C}$$

1) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^5}}$;
$$F(x) = -\frac{1}{(5-1)x^{5-1}} + C = -\frac{1}{4x^4} + C.$$

2) $\boldsymbol{f(x) = x^{-4}}$. Преобразуем функцию:
$f(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$; $F(x) = -\frac{1}{(4-1)x^{4-1}} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$

Решить самостоятельно: Найти общий вид первообразных функций: 1)$f(x) = \frac{1}{x^8}$; 2)$f(x) = x^{-6}$.

Если функция $kf(x)$, то ее первообразная $kF(x)+C$ (т.е. коэффициент остается)

1) $\boldsymbol{f(x) = 4x^6}$; $F(x) = 4 \cdot \frac{x^7}{7} + C = \frac{4x^7}{7} + C$

2) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{x^5}}$; $F(x) = -\frac{3}{4x^4} + C$

3) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{4}}$; $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{8} + C.$

4) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{5}}$; $F(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{20} + C.$

Решить самостоятельно: Найти общий вид первообразных функций: 1)$f(x) = 7x^{13}$; 2)$f(x) = \frac{6}{x^7}$.

Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$, то первообразная $F(x) = F_1(x) + F_2(x) + \dots + F_n(x) + C$.

1) $\boldsymbol{f(x) = 7x^6 + 2\sqrt{x} + \frac{5}{x^5} + 6} = 7x^6 + 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{x^5} + 6.$ Найдем первообразную, учитывая, что первообразная для функции $f(x) = 6$, есть $F(x) = 6x + C$.

$$F(x) = 7 \cdot \frac{x^7}{7} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{5}{4x^4} + 6x + C = 7 \cdot \frac{x^7}{7} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{5}{4x^4} + 6x + C = x^7 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{4x^4} + 6x + C = x^7 + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{5}{4x^4} + 6x + C.$$

Решить самостоятельно: Найти общий вид первообразных функции: $f(x) = 4x^3 + 6\sqrt[5]{x^6} - \frac{10}{x^5} - 7.$

Если функция $f(kx)$, то первообразная $F(x) = \frac{1}{k} f(x) + C$

1) $\boldsymbol{f(x) = 9\sin 3x}$.
$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \cos 3x + C = -3\cos 3x + C.$

3) $\boldsymbol{f(x) = 3(7-4x)^5}$.
$F(x) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{(7-4x)^6}{6} + C = -\frac{3(7-4x)^6}{24} + C = -\frac{(7-4x)^6}{8} + C.$

2) $\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{\cos^2\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{3}\right)}}$.

4) $\boldsymbol{f(x) = 5^{6x} + e^{\frac{x}{3}} - \frac{2}{x}}$.

$F(x) = 4 \cdot 5tg(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{3}) + C$=$20tg\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{3}\right) + C.$	$F(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5^{6x}}{\ln 5} + 3e^{\frac{x}{3}} - 2\ln x + C = \frac{5^{6x}}{6\ln 5} + 3e^{\frac{x}{3}} - 2\ln x + C.$

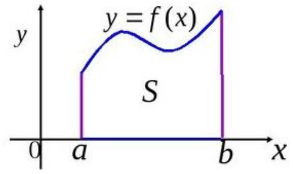
Решить самостоятельно: Найти общий вид первообразных функций: 1) $f(x)$ = $4\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3})$;
2)$f(x) = \frac{2}{sin^2 3x}$; 3)$f(x) = 5(2x-3)^4$; 4)$f(x) = 4^{\frac{x}{2}} - e^{-x} + \frac{5}{x}$.

Задачи для самостоятельного решения

В-1 Найти общий вид первообразной: а) f (x) = 5x + 2; б) f (x) = $3x^2$ + 2x – 1; в) f (x) = 2 cosx – 3 sinx; г) f (x) = $\frac{3}{x^2}$ - $6x^2$ - 17x + 15; д) f (x) = 12 x^2 - 2x + 1; е) f (x) = 4 x^4 - $6x^3$.	**В-2**Найти общий вид первообразной: а) f (x) = $3x^4$ - x^2 + 4; б) f (x) =$5x^2$ + x + 2; в) f (x) = sinx –cosx; г) f (x) = $8x^3$ - $\frac{5}{x^3}$; д) f (x) = 3x – 14; е) f (x) = $\frac{1}{\cos^2 x}$ + 4x.
В-3Найти одну из первообразных: а) f(x) = $5x^4$ – 8 x^2 + 12x; б) f(x) = $4x^2$ - 7x; в) f(x) = 6 x^2 – 2 x + 1; г) f(x) = 14 x^3 – 21 x^2 + 3; д) f(x) = $\frac{1}{x^3}$ + $\frac{2}{x^5}$; е) f (x) = 2 sinx – 3 cosx.	**В-4**Найти одну из первообразных: а) f(x) = $4x^3$ - 1,5 x^2; б) f(x) = x^7 – 2 x^5 + 3; в) f(x) = x^4 – 3 x^2 + 5 x; г) f(x) = 2 x^3 – 5 x^2 – 2 x – 4; д) f(x) = $\frac{1}{x^5}$ + $\frac{2}{x^2}$; е) f (x) = 9 x^2 + 6 x – 2.
В-5Найти одну из первообразных: а) f(x) = x^3 - 4x + 7x – 2; б) f(x) = $4x^4$ + $9x^2$ - 11x + 6; в) f(x) = $3x^5$ - $5x^2$; г) f(x) = cosx – 4; д) f(x) = 6 x^5 + 4 x^2 – 5 x + 2; е) f (x) = $\frac{5}{\sin^2 x}$ - cosx.	**В-6**Найти одну из первообразных: а) f(x) = x^3 – $6x^2$ + 12x – 1; б) f(x) = x^2 + 9x – 7; в) f(x) = $4x^3$ – 4x; г) f(x) = sin x + 2; д) f(x) = $2x^5$ - $4x^3$ + 2x; е) f (x) = 5sinx – $\frac{2}{\cos^2 x}$.

Тема: Площадь криволинейной трапеции и площадь фигур, ограниченных графиками функций.

f(x)	**k**	$\mathbf{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	**sinx**	**cosx**	$\frac{1}{cos^2 x}$	$\frac{1}{sin^2 x}$	$\mathbf{a^x}$	$\mathbf{e^x}$	$\frac{1}{x}$
F (x)+c	**kx+c**	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$2\sqrt{x}$**+c**	**-cosx+c**	**sinx+c**	**tgx+c**	$-$**ctgx** $+ c$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	$\mathbf{e^x}$ **+c**	**ln**$\lvert x \rvert$ **+c**

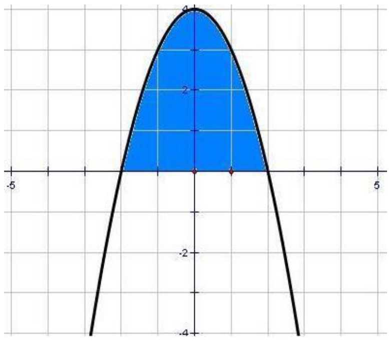


Площадь криволинейной трапеции

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Где F(x)-любая первообразная функции f(x)

I.Площадь криволинейной трапеции



1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями y = 4 - x² и y = 0.

1 с п о с о б. 1) y = 4 - x²- квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вниз. Найдем координаты вершины параболы по формуле m = $-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot(-1)} = 0.$ n=4$-0^2 = 4.$

Вершина (0;4). y = 0 - ось абсцисс.

2) Найдём точки пересечения параболы с осью X:$x^2 - 4 = 0;$
$x^2 = 4,\quad x_1 = 2,\quad x_2 = -2,\quad$ т.е. $a = 2, b = -2.$

3)Это криволинейная трапеция. Найдем площадь по формуле.

$S = F(b) - F(a)$

$F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$. $S = F(b) - F(a) = \left(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} =$
$10\frac{2}{3}$ (ед.^{2}).

Ответ: $10\frac{2}{3}$ (ед.^{2}).

2 с п о с о б. Р е ш е н и е:

1) y = 4 - x²- квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вниз. Найдем координаты вершины параболы по формуле m = $-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot(-1)} = 0.$ n = 4$-0^2 = 4.$ Вершина (0;4)

2) y = 0 - ось абсцисс.

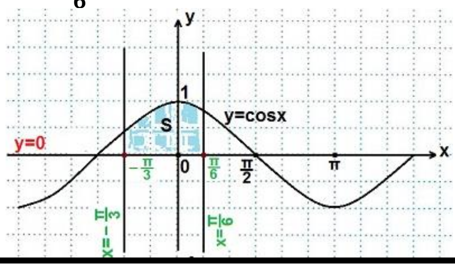
3) Найдём точки пересечения параболы с осью Ox: $x^2 - 4 = 0;$
$x^2 = 4,\quad x_1 = 2,\quad x_2 = -2,\quad$ т.е. $a = -2, b = 2.$

3) Найдём площадь криволинейной трапеции по формуле:

$S = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} =$
$16 - 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$ (ед.^{2}).

Ответ: $10\frac{2}{3}$ (ед.^{2}).

2.Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями y = $\boldsymbol{\cos x}$, y = 0, $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{3}; x = \frac{\pi}{6}}$.



Р е ш е н и е: $S = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\, dx = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$
$= \sin\frac{\pi}{6} - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

II. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций.

Чтобы найти площадь фигуры, ограниченной двумя функциями надо из интеграла верхней функции вычесть интеграл нижней функции : S = $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)}$.Далее

применяя свойство интегралов, объединим их в один $\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx \ \ (1)}$, ***где***

$\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ - ***абсциссы точек пересечения графиков функций.***

3.Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $\boldsymbol{y = x}$ и $\boldsymbol{y = x^2 - 2}$.

Р е ш е н и е:1)Построим график параболы $y = x^2 - 2$.Это квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вверх. Найдем координаты вершины параболы по формуле

m = $-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot 1} = 0$.   n = $0^2 - 2 = -2$.

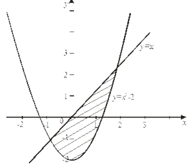
Координаты вершины (0;-2). Найдем точки пересечения параболы с осью Ох:

$x^2 - 2 = 0$; $x_1 = -\sqrt{2} \approx -1{,}4$.

$x_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}4$.

2)Построим график функции $y = x$ –линейная функция, график прямая, биссектриса I и III координатных четвертей

x	-2	2
y	-2	2



3)Площадь фигуры вычислим по формуле

$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx \ \ (1)$.

Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций, приравняв их правые части $x^2 - 2 = x$,

$x^2 - x - 2 = 0$,

$x_1 = -1$, $x_1 = 2$; следовательно,

$a = -1$, $b = 2$.Сверху фигура ограничена графиком функции $y = x$ **,** снизу параболой. Значит, в формуле (1) $f(x) = \ x$, а $g(x) = x^2 - 2$. Получим: $S = \int_{-1}^{2}(x - (x^2 - 2))dx = \int_{-1}^{2}(x - x^2 + 2))dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} =$

$$= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} + 2\cdot 2\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 2\cdot(-1)\right) =$$

$2 \ -\frac{8}{3} + 4 \ -\frac{1}{2} - \ \frac{1}{3} + 2 = 8 - 3 \ -\frac{1}{2} = 4{,}5$(кв.ед.).

Ответ: 4,5 кв.ед.

4.Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функций $\boldsymbol{y = x + 2}$ и $\boldsymbol{y = 6x - x^2}$.

Р е ш е н и е:1)Построим график параболы $y = 6x - x^2$.Это квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вниз. Найдем координаты вершины параболы по формуле

m = $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot(-1)} = 3$.

n = $6 \cdot 3 - 3^2 = 9$. Вершина (3;9). Найдем точки пересечения параболы с осью Ох:

$6x - x^2$=0; $x(6 - x) = 0$, $x_1 = 0$. $x_2 = 6$.

2)Построим график функции $y = x + 4$ – линейная функция, график прямая.

x	-1	2
y	3	6

3)Площадь фигуры вычислим по формуле

$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx \ \ (1)$.

Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций, приравняв их правые части

$6x - x^2 = x + 2$,

$-x^2 + 5x - 2 = 0$,

$x_1 = 1$, $x_1 = 4$; следовательно,

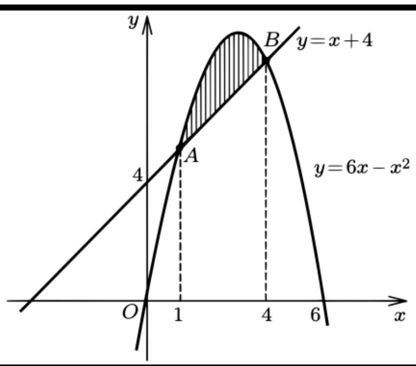
$a = 1$, $b = 4$.

Сверху фигура ограничена графиком функции $y = 6x - x^2$ **,** снизу прямой. Значит, в формуле (1) $f(x) = \ 6x - x^2$, а $g(x) = x + 2$. Получим: $S = \int_1^4 \big(6x - x^2 - (x + 2)\big)dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 2))dx = \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2x\right)\Big|_1^4 =$

$$= \left(\frac{5\cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} - 2\cdot 4\right) - \left(\frac{5\cdot 1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1\right) =$$

$40 \ -\frac{64}{3} - 8 \ -\frac{5}{2} + \frac{1}{3}$ +2 = 34 – $\frac{63}{3}$ −2,5 = 34-21-2,5=10,5 (кв.ед.).

Ответ: 10,5 кв.ед.



Решить самостоятельно: Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:1) $y = 9 - x^2$, $y = 0$.

2) $y = x,\ y = x^2 - x - \frac{5}{4}$. 3) $y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$; 4) $y = \sin x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$;

5) $y = x^2 - x - 5$ и $y = x - 2$.

Задачи для самостоятельного решения

1 вариант	2 вариант
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
1. $y = 16 - x^2$, $y = 0$	1. $y = 25 - x^2$, $y = 0$
2. $y = \cos x, x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}$.	2. $y = \sin x, x = \pi,\ x = \frac{\pi}{3}$.
3. $y = 4 + 3x - x^2$ и $y = x + 1$.	3. $y = -x^2 + 4$ и $y = 2 - x$.
Доп. задание: $y = x - x^2$ *и* $y = x^2 - x$	Доп. задание: $y = x - x^2$ *и* $y = x^2 - x$