ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАЧА С6

Алексей Константинович Ярдухин, кандидат физико- математических наук. Доцент кафедры математики Чувашской государственной сельскохозяйственной академии.

ЗАДАНИЯ ТИПА С6 ПОЯВИЛИСЬ В ВАРИАНТАХ ЕГЭ В 2010 ГОДУ ОДНОВРЕМЕННО С ОТМЕНОЙ ГРУППЫ А (ЗАДАЧИ С ВЫБОРОМ ОТВЕТА). ЭТО ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДНОГО ТИПА, РАССЧИТАННОЕ НА СИЛЬНЫХ УЧАЩИХСЯ, ПРЕТЕНДУЮЩИХ НА ПОСТУПЛЕНИЕ В ВУЗЫ С ВЫСОКИМИ ТРЕБОВАНИЯМИ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ.

ПРИМЕР ЗАДАЧИ С6 образца 2010 года:

Перед каждым из чисел 4, 5, ..., 8 *и* 14, 15, ..., 20 *произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?*

(Ответ: 1 и 805)

Критерии оценивания выполнения задания С6 образца 2010 года:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что она всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что она всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Что нужно помнить при решении задачи С6?

1. Задача С6 – относительно сложная, поскольку требует нестандартных путей решения. Однако для ее решения не нужны никакие специальные знания, выходящие за рамки школьной программы. Вполне возможно, что она окажется проще и короче решаемой, чем даже задачи С3 - С5. Поэтому бояться ее не стоит.

2. В этой задаче ситуация «все или ничего» маловероятна. Продвинуться в решении на 1-2 балла из 4 на самом деле не так уж и сложно – достаточно рассмотреть самый простой частный случай или просто подобрать некоторые решения, удовлетворяющие. Например, если в приведенной выше задаче мы догадаемся, что для нахождения наибольшего значения суммы достаточно подсчитать сумму

$$7 \cdot (4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 5 \cdot (14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20),$$

то мы уже получим 1 балл, а если выяснить, что при любых знаках эта сумма будет нечетной, то 2.

Какие темы необходимо повторить перед решением задач С6?

1. Простые и составные числа. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель. Взаимно простые числа. Деление с остатком. Алгоритм Евклида

$$НОД(A, B) = НОД(A, B – nA),\ n \in N.$$

ПРИМЕР:

$$НОД\ (546, 658) = НОД\ (546, 658 - 546) =$$
$$= НОД\ (546, 112) = НОД\ (546 - 112 \cdot 4, 112) =$$
$$= НОД\ (98, 112) = НОД\ (98, 112 - 98) =$$
$$= НОД\ (98, 14) = 14.$$

2. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11. При этом признаки делимости на 3 и на 9 желательно помнить в следующем виде: «Само число и сумма его цифр при делении на 3 (9) дают один и тот же остаток».

ПРИМЕР:

сумма цифр числа 123456789101112 равна 51, сумма цифр числа 51 равна 6. Значит, число 123456789101112 делится на 3 нацело, а при делении на 9 дает остаток 6.

3. Десятичная запись числа.

4. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

5. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n},$$

причем равенство достигается только при равенстве всех чисел $a_1, a_2, ..., a_n$.

В частности:

– для любых неотрицательных чисел a и b выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab};$$

– для любого числа а ≠ 0 выполняется неравенство $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2.$

ПРИМЕР:

найти наибольшее значение выражения $$\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{x+y+z}$$

при положительных x, y, z.

Имеем

$$\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{x+y+z} \le \frac{\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{x+z}{2}}{x+y+z}=1.$$

При $x=y=z>0$

$$\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{x+y+z}=\frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}{x+x+x}=1.$$

Таким образом, данное выражение не может принимать значений, больших 1, но может принимать значение 1. Значит, наибольшее значение данного выражения равно 1.

НЕКОТОРЫЕ ПОЛЕЗНЫЕ ФАКТЫ, которые важно знать до начала решения задач С6.

1. Основная теорема арифметики и количество делителей. Каждое натуральное число $n > 1$ имеет единственное (с точностью до порядка множителей) разложение на простые множители $n = p_1^{k1} \cdot p_2^{k2} \cdot ... \cdot p_m^{km}$, где $p_1, p_2, ..., p_m$ – попарно различные простые числа, $k_1, k_2, ..., k_m$ – натуральные числа. Данная форма записи называется каноническим разложением числа n.

Количество натуральных делителей числа n, записанного в канонической форме, равно

$$\varphi(n) = (k_1 + 1)(k_1 + 1)... (k_m + 1)$$

В частности, **нечетное количество натуральных делителей может иметь только точный квадрат** (так как $\varphi(n)$ будет нечетным тогда и только тогда, когда все числа $k_1, k_2, ..., k_m$ будут четными).

ПРИМЕР:

найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя, включая 1 и само число.

Если число делится на 42, то оно делится на 2, 3 и 7. Следовательно, данное число имеет вид n= $2^{k1} \cdot 3^{k2} \cdot 7^{k3} \cdot q$, где q – некоторое натуральное число, не делящееся ни на 2, ни на 3, ни на 7.

Значит, $\varphi(n) = (k_1 + 1)(k_1 + 1) \cdot \varphi(q) = 42$.

Однако число 42 можно разложить на натуральные множители, большие 1, только одним (с точностью до порядка множителей) способом:

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Отсюда $q = \varphi(q) = 1$,

а $k_1 + 1$, $k_2 + 1$ и $k_3 + 1$ – это числа 2, 3 и 7, взятые в некотором порядке.

Остается перебрать 6 вариантов и записать все возможные значения n:
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$, $2^6 \cdot 3 \cdot 7^2$, $2^2 \cdot 3^6 \cdot 7$,
$2^2 \cdot 3 \cdot 7^6$, $2 \cdot 3^2 \cdot 7^6$, $2 \cdot 3^6 \cdot 7^2$.

При этом вычислять n не нужно – ответ будет принят и в такой форме, а у вас будет меньше возможностей допустить ошибку.

2. СВОЙСТВА КВАДРАТОВ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В первую очередь нам важно знать, какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Сведем все эти данные в таблицу (которую вам лучше вывести самостоятельно – это простое, но полезное упражнение).

k	Остатки, которые могут получиться при делении числа вида n^2 на k	Остатки, которые не могут получиться при делении числа вида n^2 на k
2	0, 1	-
3	0, 1	2
4	0, 1	2, 3
5	0, 1, 4	2, 3
6	0, 1, 3, 4	2, 5
7	0, 1, 2, 4	3, 5, 6
8	0, 1, 4	2, 3, 5, 6, 7
9	0, 1, 4, 7	2, 3, 5, 6, 8
10	0, 1, 4, 5, 6, 9	2, 3, 7, 8

ПРИМЕР.

Десятизначное число n на 1 больше квадрата натурального числа. Доказать, что в нем есть одинаковые цифры.

Пусть верно обратное: все 10 цифр в этом числе различны. Тогда в записи числа n используются все 10 цифр от 0 до 9. Сумма этих цифр 45, следовательно, n делится на 9, а точный квадрат, который на 1 меньше n, при делении на 9 дает остаток 8, что невозможно. Получили противоречие. Значит, в десятичной записи числа n есть одинаковые цифры.

ПРИМЕР.

Решить уравнение в простых числах: $2^p - q^2 = 1999$

Подбором легко найти одну пару решений: $p = 11, q = 7$. Докажем, что других решений нет. Будем отталкиваться от возможных остатков, которые q^2 может давать при делении на 7. Как догадаться, что нужно рассматривать именно остатки от деления на 7? Ну так других частных решений мы подобрать не смогли, а начинать с чего-то нужно.

Давайте распишем рассуждения по пунктам.

1. Любой точный квадрат при делении на 7 дает остатки 0, 1, 2 и 4 (см. таблицу).
2. 1999 при делении на 7 дает остаток 4.
3. Если $q = 7$, то $p = 11$. Далее считаем, что q не равно 7.
4. q не делится на 7 (так как q – простое число).
5. Следовательно, q^2 при делении на 7 может давать остатки 1, 2 и 4.
6. $q^2 + 1999$ при делении на 7 может давать остатки 5, 6 и 1.
7. 2^p при делении на 7 может давать остатки 2, 4, 1 (докажите это самостоятельно).
8. Остатки при делении левой и правой частей на 7 равны друг другу, а значит, равны 1.
9. Однако 2^p дает остаток 1 при делении на 7, только если $p = 3k, k \in N$, т.е. p – составное число.
10. Следовательно, $p = 11, q = 7$ – единственное решение в простых числах.

Некоторые приемы и методы решения задач С6 будут рассмотрены в следующих номерах.

Источники для подготовки:

1. Пратусевич М.Я. и др. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 48 с.
2. Корянов А.Г. Уравнения и неравенства в целых числах (от учебных задач до олимпиадных), http://alexlarin.narod.ru/ege/2010/agkc6.pdf
3. Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2011 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2011. – 144 с.