Как найти множество значений функции

В.В. Сильвестров

Задачи на нахождение множества значений функции вызывают немалые затруднения у учащихся. Такие задачи неизменно содержатся в заданиях различных математических тестов и испытаний и, в частности, в заданиях единого государственного экзамена (ЕГЭ). Например, в заданиях ЕГЭ-2007 к нахождению множества значений функции сводится задача С3 по исследованию неравенства с параметром, а в заданиях ЕГЭ-2008 с этой темой связаны задачи высокого уровня сложности С3 и С5, не говоря уже о более простых задачах уровней сложности А и В. Целью данной статьи является ознакомление с методами нахождения множества значений функции.

Для успешного нахождения множества значений функции надо хорошо знать свойства основных элементарных функций, особенно, их области определения, области значений и характер монотонности. Приведем свойства непрерывных, монотонных и дифференцируемых функций, наиболее часто используемые при нахождении множества значений функции.

1. Если функция $f(x)$ *непрерывна и возрастает* на отрезке $[a;b]$, то множество значений функции на этом отрезке есть отрезок $[f(a);f(b)]$. При этом каждое значение $A \in [f(a);f(b)]$ функция принимает ровно при одном значении $x \in [a;b]$, т.е. уравнение $f(x) = A$ имеет единственный корень на отрезке $[a;b]$. Если же $f(x)$ – *непрерывная и убывающая* функция на отрезке $[a;b]$, то ее множество значений на $[a;b]$ есть отрезок $[f(b);f(a)]$.

2. Если функция $f(x)$ *непрерывна* на отрезке $[a;b]$ и $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ – ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке, то множество значений $f(x)$ на $[a;b]$ есть отрезок $[m;M]$.

3. Если функция *непрерывна* на отрезке $[a;b]$ и *дифференцируема* (имеет производную) в интервале $(a;b)$, то наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a;b]$ существуют и достигаются либо на концах отрезка, либо в критических точках функции, расположенных на отрезке.

Свойства 2 и 3, как правило, используются вместе со свойством элементарной функции быть непрерывной в своей области определения. При этом наиболее простое и краткое решение задачи на нахождение множества значений функции достигается на основании свойства 1, если несложными методами удается определить монотонность функции. Решение задачи еще упрощается, если функция, вдобавок, – четная или нечетная, периодическая и т.д. Таким образом, при решении задач на нахождение множества значений функции слдедует по мере надобности проверять и использовать следующие свойства функции:

непрерывность;
монотонность;
дифференцируемость;
четность, нечетность, периодичность и т.д.

Несложные задачи на нахождение множества значений функции в большинстве своем ориентированы на

а) использование простейших оценок и ограничений ($x^2 \geq 0$, $2^x > 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ и т.д.);

б) выделение полного квадрата ($x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$);

в) преобразование тригонометрических выражений ($2\sin^2 x - 3\cos^2 x + 4 = 5\sin^2 x + 1$);

г) использование монотонности функции ($\sqrt[3]{x} + 2^{x-1}$ возрастает на $\boldsymbol{R}$).

Примеры среднего уровня сложности В на эти методы, для самостоятельного решения, приводятся в конце статьи.

Более сложные задачи на нахождение множества значений функции рассчитаны на

а) последовательное нахождение значений сложных аргументов функции;

б) метод оценок;
в) использование свойств непрерывности и монотонности функции;
г) использование производной;
д) использование наибольшего и наименьшего значений функции;
е) графический метод;
ж) метод введения параметра;
з) метод обратной функции.

Раскроем суть этих методов на конкретных примерах.

Пример 1. Найдите область значений $E(y)$ функции $y = \log_{0,5}(4 - 2 \cdot 3^x - 9^x)$.

Решим пример *методом последовательного нахождения значений сложных аргументов функции*. Выделив полный квадрат под логарифмом, преобразуем функцию

$$y = \log_{0,5}(5 - (1 + 2 \cdot 3^x + 3^{2x})) = \log_{0,5}(5 - (3^x + 1)^2)$$

и последовательно найдем множества значений ее сложных аргументов:

$$E(3^x) = (0; +\infty), \quad E(3^x + 1) = (1; +\infty), \quad E(-(3^x + 1)^2) = (-\infty; -1), \quad E(5 - (3^x + 1)^2) = (-\infty; 4).$$

Обозначим $t = 5 - (3^x + 1)^2$, где $t \in (-\infty; 4)$. Тем самым, задача сводится к нахождению множества значений функции $y = \log_{0,5} t$ на луче $(-\infty; 4)$. Так как функция $y = \log_{0,5} t$ определена лишь при $t \in (0; +\infty)$, то ее множество значений на луче $(-\infty; 4)$ совпадает с множеством значений функции на интервале $(0; 4)$, представляющем собой пересечение луча $(-\infty; 4)$ с областью определения $(0; +\infty)$ логарифмической функции. На интервале $(0; 4)$ эта функция непрерывна и убывает. При $t \to 0$ она стремится к $+\infty$, а при $t = 4$ принимает значение -2, поэтому $E(y) = (-2, +\infty)$.

Заметим, что для решения примера вовсе не требовалось находить предварительно область определения исходной функции, хотя в ходе решения примера обойти эту проблему полностью все же не удалось.

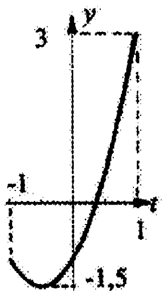
Пример 2. Найдите область значений функции $y = \cos 7x + 5\cos x$.

Решим пример *методом оценок*, суть которого состоит в оценке непрерывной функции снизу и сверху и в доказательстве достижения функцией нижней и верхней границы оценки. При этом совпадение множества значений функции с промежутком от нижней границы оценки до верхней обуславливается непрерывностью функции и отсутствием у нее других значений.

Из неравенств $-1 \le \cos 7x \le 1$, $-5 \le 5\cos x \le 5$ получим оценку $-6 \le y \le 6$. При $x = \pi$ и $x = 0$ функция принимает значения -6 и 6, т.е. достигает нижней и верхней границы оценки. Как линейная комбинация непрерывных функций $\cos 7x$ и $\cos x$, функция y непрерывна на всей числовой оси, поэтому по свойству непрерывной функции она принимает все значения с -6 до 6 включительно, и только их, так как в силу неравенств $-6 \le y \le 6$ другие значения у нее невозможны. Следовательно, $E(y) = [-6; 6]$.

Наиболее распространенная ошибка при нахождении множества значений функции методом оценок состоит в следующем. На основании полученной оценки, например неравенств $A \le f(x) \le B$, делается ошибочно заключение, что множество значений функции есть отрезок $[A; B]$, в то время, как такое заключение можно сделать лишь тогда, когда функция *непрерывна* на рассматриваемом промежутке и на нем имеются точки, в которых функция принимает значения A и B (достигает нижней A и верхней B границы оценки). В общем случае неравенства $A \le f(x) \le B$ лишь означают, что множество значений функции принадлежит отрезку $[A; B]$, и вовсе не означают, что множество значений функции совпадает со всем отрезком $[A; B]$. Например, значения функции $f(x) = \cos 2x + 2\cos x$ удовлетворяют неравенствам $-3 \le f(x) \le 3$. Однако нет таких значений x, при которых функция принимала бы значение -3, поэтому на основании неравенств $-3 \le f(x) \le 3$ можно лишь утверждать о принадлежности множества значений функции отрезку $[-3; 3]$. На самом деле, как будет показано в следующем примере, $E(f) = [-1{,}5; 3]$.

Пример 3. Найдите область значений $E(f)$ функции $f(x) = \cos 2x + 2\cos x$.



По формуле косинуса двойного угла преобразуем функцию $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$ и обозначим $t = \cos x$. Тогда $f(x) = 2t^2 + 2t - 1$. Так как $E(\cos x) = [-1; 1]$, то область значений функции $f(x)$ совпадает с множеством значений функции $g(t) = 2t^2 + 2t - 1$ на отрезке $[-1; 1]$, которое найдем *графическим методом.* Построив график функции $y = 2t^2 + 2t - 1 = 2(t + 0{,}5)^2 - 1{,}5$ на промежутке $[-1; 1]$, находим $E(f) = [-1{,}5; 3]$.

К нахождению множества значений функции сводятся многие задачи с параметром, связанные, в основном, с разрешимостью и числом решений уравнений и неравенств. Например, уравнение $f(x) = a$ разрешимо тогда и только тогда, когда $a \in E(f)$. Аналогично, уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы один корень, расположенный на некотором промежутке X, или не имеет ни одного корня на этом промежутке тогда и только тогда, когда a принадлежит или не принадлежит множеству значений функции $f(x)$ на промежутке X. Также исследуются с привлечением множества значений функции и неравенства $f(x) \neq a$, $f(x) > a$ и т.д. В частности, $f(x) \neq a$ для всех допустимых значений x, если $a \notin E(f)$.

Пример 4. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+5} = a(x^2 + 4)$ имеет единственный корень на отрезке $[-4; -1]$.

Запишем уравнение в виде $\dfrac{\sqrt{x+5}}{x^2+4} = a$. Последнее уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке $[-4; -1]$ тогда и только тогда, когда a принадлежит множеству значений функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{x^2+4}$ на отрезке $[-4; -1]$. Найдем это множество, используя свойство *непрерывности и монотонности* функции.

На отрезке $[-4; -1]$ функция $y = x^2 + 4$ непрерывна, убывает и положительна, поэтому функция $g(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$ непрерывна и возрастает на этом отрезке, так как при делении на положительную функцию характер монотонности функции меняется на противоположный. Функция $h(x) = \sqrt{x+5}$ непрерывна и возрастает в своей области определения $D(h) = [-5; +\infty)$ и, в частности, на отрезке $[-4; -1]$, где она, кроме того, положительна. Тогда функция $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, как произведение двух непрерывных, возрастающих и *положительных* функций, также непрерывна и возрастает на отрезке $[-4; -1]$, поэтому ее множество значений на $[-4; -1]$ есть отрезок $[f(-4); f(-1)] = [0{,}05; 0{,}4]$. Следовательно, уравнение имеет решение на отрезке $[-4; -1]$, причем единственное (по свойству непрерывной монотонной функции), при $a \in [0{,}05; 0{,}4]$.

Как уже отмечалось, разрешимость уравнения $f(x) = a$ на некотором промежутке X равносильна принадлежности значений параметра a множеству значений функции $f(x)$ на X. Следовательно, *множество значений функции $f(x)$ на промежутке X совпадает с множеством значений параметра a, для которых уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы один корень на промежутке X.* В частности, область значений $E(f)$ функции $f(x)$ совпадает с множеством значений параметра a, для которых уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы один корень.

Пример 5. Найдите область значений $E(f)$ функции $f(x)=\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+3}$.

Решим пример *методом введения параметра*, согласно которому $E(f)$ совпадает с множеством значений параметра *a*, для которых уравнение

$$\frac{2x^2-4x+1}{x^2+3}=a \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2-4x+1=a(x^2+3) \quad\Leftrightarrow\quad (2-a)x^2-4x+1-3a=0$$

имеет хотя бы один корень.

При $a=2$ уравнение является линейным $-4x-5=0$ с ненулевым коэффициентом при неизвестной *x*, поэтому имеет решение. При $a\neq 2$ уравнение является квадратным, поэтому оно разрешимо тогда и только тогда, когда его дискриминант

$$D\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{D}{4}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3a^2-7a-2\leq 0\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{7-\sqrt{73}}{6}\leq a\leq\frac{7+\sqrt{73}}{6}.$$

Так как точка $a=2$ принадлежит отрезку $\left[\dfrac{7-\sqrt{73}}{6};\dfrac{7+\sqrt{73}}{6}\right]$, то искомым множеством значений параметра *a*, значит, и областью значений $E(f)$ будет весь этот отрезок.

Как непосредственное развитие метода введения параметра при нахождении множества значений функции, можно рассматривать *метод обратной функции*, для нахождения которой надо решать относительно *x* уравнение $f(x)=y$, считая *y* параметром. Если это уравнение имеет единственное решение $x=g(y)$, то область значений $E(f)$ исходной функции $f(x)$ совпадает с областью определения $D(g)$ обратной функции $g(y)$. Если же уравнение $f(x)=y$ имеет несколько решений $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$ и т.д., то $E(f)$ равна объединению областей определений функций $g_1(y)$, $g_2(y)$ и т.д.

Пример 6. Найдите область значений $E(y)$ функции $y=5^{\frac{2}{1-3^x}}$.

Из уравнения

$$5^{\frac{2}{1-3^x}}=y \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{1-3^x}=\log_5 y \quad\Leftrightarrow\quad 3^x=\frac{\log_5 y-2}{\log_5 y}$$

найдем обратную функцию $x=\log_3\left(\dfrac{\log_5 y-2}{\log_5 y}\right)$ и ее область определения $D(x)$:

$$\frac{\log_5 y-2}{\log_5 y}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\log_5 y>2,\\ \log_5 y<0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}y>25,\\ 0<y<1\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad D(x)=(0;1)\cup(25;+\infty).$$

Так как уравнение относительно *x* имеет единственное решение, то
$E(y)=D(x)=(0;1)\cup(25;+\infty)$.

Если область определения функции состоит из нескольких промежутков или функция на разных промежутках задана разными формулами, то для нахождения области значений функции надо найти множества значений функции на каждом промежутке и взять их объединение.

Пример 7. Найдите области значений функций $f(x)$ и $f(f(x))$, где

$$f(x)=\begin{cases}4^x+9\cdot 4^{-x}+3, & x\leq 1,\\ 2\cos\sqrt{x-1}+7, & x>1.\end{cases}$$

Найдем сначала множество значений функции $f(x)$ на луче $(-\infty;1]$, где она совпадает с выражением $4^x+9\cdot 4^{-x}+3$. Обозначим $t=4^x$. Тогда $f(x)=t+\frac{9}{t}+3$, где $t\in(0;4]$, так как показательная функция $t=4^x$ непрерывно возрастает на луче $(-\infty;1]$ и стремится к нулю при $x\to-\infty$. Тем самым, множество значений функции $f(x)$ на луче $(-\infty;1]$ совпадает с множеством значений функции $g(t)=t+\frac{9}{t}+3$ на промежутке $(0;\,4]$, которое найдем, *используя производную* $g'(t)=1-\frac{9}{t^2}$. На промежутке $(0;\,4]$ производная $g'(t)$ определена и обращается там в нуль при $t=3$. При $0<t<3$ она отрицательна, а при $3<t<4$ положительна. Следовательно, в интервале $(0;\,3)$ функция $g(t)$ убывает, а в интервале $(3;\,4)$ она возрастает, оставаясь непрерывной на всем промежутке $(0;\,4]$, поэтому $g(3)=9$ – наименьшее значение этой функции на промежутке $(0;4]$, в то время, как ее наибольшее значение не существует, так при $t\to 0$ справа функция $g(t)\to+\infty$. Тогда, по свойству непрерывной функции, множеством значений функции $g(t)$ на промежутке $(0;\,4]$, значит, и множеством значений $f(x)$ на $(-\infty;\,1]$ будет луч $[9;\,+\infty)$.

При $x>1$ функция $f(x)$ совпадает с выражением $2\cos\sqrt{x-1}+7$. Квадратный корень $\sqrt{x-1}$ при $x>1$ определен и принимает все положительные значения, поэтому $\cos\sqrt{x-1}$ принимает все значения от -1 до 1 включительно, а выражение $2\cos\sqrt{x-1}+7$ принимает все значения от 5 до 9 включительно. Следовательно, множеством значений функции $f(x)$ на луче $(1;\,+\infty)$ будет отрезок $[5;\,9]$.

Теперь, объединив промежутки $[9;\,+\infty)$ и $[5;\,9]$ – множества значений функции $f(x)$ на лучах $(-\infty;\,1]$ и $(1;\,+\infty)$ соответственно, найдем ее область значений $E(f)=[5;\,+\infty)$.

Чтобы найти область значений функции $f(f(x))$, обозначим $t=f(x)$. Тогда $f(f(x))=f(t)$, где $t\in E(f)\iff t\in[5;\,+\infty)$. При указанных t функция $f(t)=2\cos\sqrt{t-1}+7$ и она снова принимает все значения от 5 до 9 включительно, т.е. область значений $E(f^2)=E\big(f(f(x))\big)=[5;\,9]$.

Аналогично, обозначив $z=f(f(x))$, можно найти область значений $E(f^3)$ функции $f(f(f(x)))=f(z)$, где $z\in[5;\,9]$, и т.д. Убедитесь, что $E(f^3)=[2\cos\sqrt{8}+7;\,2\cos 2+7]$.

Наиболее универсальным методом нахождения множества значений функции является *использование наибольшего и наименьшего значений функции* на заданном промежутке.

Пример 8. При каких значениях параметра p неравенство $8^x-p\neq 2^{2x+1}-2^x$ выполняется для всех $x\in[-1;\,2)$.

Обозначив $t=2^x$, запишем неравенство в виде $p\neq t^3-2t^2+t$. Так как $t=2^x$ – непрерывная возрастающая функция на ***R***, то при $x\in[-1;\,2)$ переменная $t\in[2^{-1};\,2^2)\iff t\in[0{,}5;\,4)$, и исходное неравенство выполняется для всех $x\in[-1;\,2)$ тогда и только тогда, когда p отлична от значений функции $f(t)=t^3-2t^2+t$ при $t\in[0{,}5;\,4)$.

Найдем сначала множество значений функции $f(t)$ на отрезке $[0{,}5;\,4]$, где она всюду имеет производную $f'(t)=3t^2-4t+1$. Следовательно, $f(t)$ дифференцируема, значит, и непрерывна на отрезке $[0{,}5;\,4]$. Из уравнения $f'(t)=0$ найдем критические точки функции $t=\frac{1}{3}$, $t=1$, первая из которых не принадлежит отрезку $[0{,}5;\,4]$, а вторая принадлежит ему. Так как $f(0{,}5)=\frac{1}{8}$, $f(1)=0$, $f(4)=36$, то, по свойству дифференцируемой функции, 0 – наименьшее, а 36 – наибольшее значение функции $f(t)$ на отрезке $[0{,}5;\,4]$. Тогда $f(t)$, как непрерывная функция, принимает на отрезке $[0{,}5;\,4]$ все значения от 0 до 36 включительно, причем значение 36 принимает только при $t=4$, поэтому при $t\in[0{,}5;\,4)$ она принимает все значения из промежутка $[0;\,36)$. Тем самым, $p\notin[0;\,36)\iff p\in(-\infty;\,0)\cup[36;\,+\infty)$.

Приведенные примеры охватывают лишь малую часть всевозможных примеров на нахождение множества значений функции. Большое число разнообразных примеров на эту тему имеется в [1]. Различные задачи, сводящиеся к нахождению множества значений функции, в том числе уравнения и неравенства с параметром, содержатся в [2] – [5]. Некоторые из этих задач приводятся ниже.

Задачи для самостоятельного решения

B1. Найдите области (множества) значений функций:

1) $y=(2\sin 2x-3\cos 2x)^2+1$; 2) $y=\sqrt{12-|x^2+4x+7|}$;

3) $y=\cos\dfrac{\pi\sqrt{8x-3-4x^2}}{3}$; 4) $y=\dfrac{8}{2-5^x}$.

B2. Найдите целые значения функции $y=(0{,}8)^{x^2+4x+2}$.

B3. Найдите множество значений функции $y=\log_{1/3}(x-1+3^x)$ при $x\ge 1$.

B4. Найдите множество значений функции $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ на отрезке $[-1;2]$.

C1. Найдите области (множества) значений функций:

1) $y=\log_{0,2}\left(\dfrac{80}{13+\log_5(125+x^4)}\right)$; 2) $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$;

3) $y=(x-1)\sqrt{x+2}+1$; 4) $y=4\sin^3 x+3\cos 2x$.

C2. Найдите области значений функций $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ и т.д., если

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x+8}{x-4}, & x<4,\\ \sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x-3}}+\sqrt{\dfrac{9x-35}{x-2}}, & x\ge 4.\end{cases}$$

C3. Найдите множество значений функции $y=\cos 2x$ на отрезке $[-\operatorname{arctg}\frac{1}{3};\operatorname{arctg}2]$.

C4. Найдите все целые значения функции $y=\sqrt{17-x}-x^3+\arccos x$.

C5. Найдите все значения функции $y=2x+|x^2-4x+3|$, каждое из которых она принимает ровно один раз.

C6. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $2\sin x-3\sin 3x=p-1$ не имеет корней.

C7. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка $[0;1)$ значение выражения 9^x-3^x не равно значению выражения $a\cdot 3^x-4$.

Ответы

B1. 1) $[1;14]$; 2) $[0;3]$; 3) $[0{,}5;1]$; 4) $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **B2.** 1. **B3.** $(-\infty;-1]$. **B4.** $[-10;2]$. **C1.** 1) $[-1;+\infty)$; 2) $[-0{,}5;2{,}5]$; 3) $[-1;+\infty)$; 4) $[-7;3]$. **C2.** $E(f)=E(f^2)=E(f^3)=\ldots=(-\infty;4)$. **C3.** $[-0{,}6;1]$. **C4.** 3; 4; 5; 6; 7; 8. **C5.** 2. **C6.** $(6;+\infty)$. **C7.** $(-\infty;3)\cup(4;+\infty)$.

Рекомендуемая литература

1. *Сильвестров В.В.* Множество значений функции: Учебное пособие. – Чебоксары, 2004. 64 с.

2. *Амелькин В.В., Рабцевич В.Л.* Задачи с параметрами. – Минск, 1996. 464 с.

3. *Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.* Задачи с параметрами. – Москва–Харьков, 1998. 336 с.

4. *Мочалов В.В., Сильвестров В.В.* Уравнения и неравенства с параметрами: Учебное пособие. 4-е изд., доп., перераб. – М., 2006. 192 с.

5. *Сильвестров В.В.* Неравенства с параметром на едином государственном экзамене // Математика для школьников. 2008. № 2. С. 3-9.