Неравенства с параметром на едином государственном экзамене

В.В. Сильвестров

Задания единого государственного экзамена (ЕГЭ) непременно содержат задачи с параметрами. Планом экзаменационной работы 2008 года*) в качестве такой задачи предусматривается неравенство с параметром – задача С3 в разделе заданий высокого уровня сложности. Успех при решении задач с параметрами, в том числе и неравенств, во многом зависит от удачного выбора метода решения задачи. Целью данной статьи является ознакомление с некоторыми основными методами решения неравенств с параметром.

Рассмотрим одну из задач С3 экзаменационной работы ЕГЭ 2007 года.

Задача 1. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка $[0;1)$ значение выражения $9^x - 3^x$ не равно значению выражения $a\cdot 3^x + 4$.

Решение. Пусть $t = 3^x$. Так как $3 > 1$, то показательная функция $t = 3^x$ возрастает и непрерывна на всей числовой оси и, в частности, на промежутке $[0;1)$, поэтому она при $x \in [0;1)$ принимает все значения от $3^0 = 1$ включительно до $3^1 = 3$, исключая само значение 3, т.е. $t \in [1;3)$. Тогда $9^x - 3^x \neq a\cdot 3^x + 4$ при всех $x \in [0;1)$ тогда и только тогда, когда

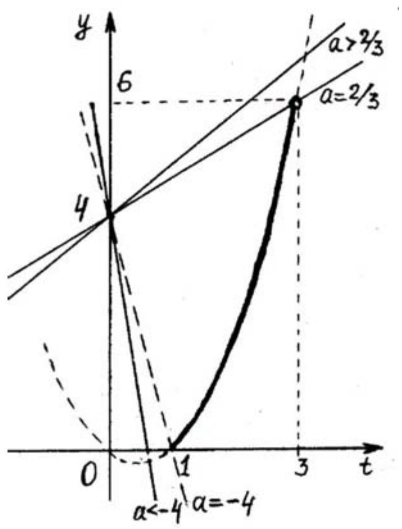
$$t^2 - t \neq at + 4 \quad \text{для всех} \quad t \in [1;3). \tag{1}$$

Имеются разные способы исследования неравенства (1).

1 способ *(решение относительно параметра и использование множества значений функции).* Из неравенства (1) при $t \in [1;3)$ находим: $a \neq t - 1 - \frac{4}{t}$.

На промежутке $[1;3)$ линейная функция $y = t - 1$ с положительным коэффициентом 1 и функция обратной пропорциональности $y = -\frac{4}{t}$ с отрицательным коэффициентом -4 возрастают и непрерывны, поэтому функция $y = t - 1 - \frac{4}{t}$, как сумма двух возрастающих непрерывных функций, также возрастает и непрерывна. Следовательно, множество значений этой функции на промежутке $[1;3)$ есть промежуток $[y(1);\, y(3)) = [-4;\, 2/3)$. Тогда $a \neq t - 1 - \frac{4}{t}$ для всех $t \in [1;3)$ тогда и только тогда, когда $a \notin [-4;\, 2/3) \iff a \in (-\infty;\, -4) \cup [2/3;\, +\infty)$.

2 способ *(графический).* В системе координат Oty при $1 \le t < 3$ построим график квадратичной функции $y = t^2 - t = (t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ – параболу с вершиной в точке $(\frac{1}{2};\, -\frac{1}{4})$ и с ветвями, направленными вверх, и семейство прямых $y = at + 4$ в зависимости от значений параметра a, причем прямые, пересекающие часть параболы $y = t^2 - t$ на промежутке $[1;3)$, изобразим пунктирными линиями, а не пересекающие её – сплошными.



Найдем значения параметра a, для которых прямая $y = at + 4$ проходит через точки $(1;0)$ и $(3;6)$ – концы указанной части параболы. Имеем:

$$0 = a + 4 \iff a = -4; \quad 6 = 3a + 4 \iff a = 2/3.$$

Тогда, как видно из рисунка, если $a < -4$ или $a \ge 2/3$, то прямая $y = at + 4$ не пересекает часть параболы на промежутке $[1;3)$, поэтому справедливо неравенство (1). При остальных значениях a прямая $y = at + 4$ пересекает указанную часть параболы, поэтому условие (1) не выполняется. Следовательно, $a \in (-\infty;\, -4) \cup [2/3;\, +\infty)$.

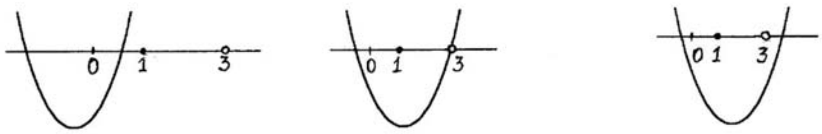
3 способ *(сведение к исследованию расположения корней квадратного трехчлена).* Условие (1) равносильно тому, что квадратное уравнение

---

*) См сайты ФИПИ и МО РФ: http://www.fipi.ru
http://ege.edu.ru

$$t^2 - t = at + 4 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - (a+1)t - 4 = 0 \qquad (2)$$

не имеет корней на промежутке [1;3). Так как дискриминант $D = (a+1)^2 + 16$ этого уравнения всегда положителен, то оно имеет два различных корня t_1, t_2. По теореме Виета $t_1 \cdot t_2 = -4 < 0$, поэтому один из корней положительный, а другой отрицательный. Следовательно, уравнение (2) не имеет корней на промежутке [1;3) тогда и только тогда, когда график функции $y = t^2 - (a+1)t - 4$ – парабола с ветвями, направленными вверх, имеет схематически одно из следующих расположений:



С учетом того, что один из корней уравнения (2) отрицателен, эти параболы однозначно описываются аналитически совокупностью неравенств

$$\left[\begin{array}{l} y(1) > 0 \\ y(3) \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -a-4 > 0 \\ 2-3a \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -4 \\ a \ge 2/3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad a \in (-\infty; -4) \cup [2/3; +\infty).$$

4 способ *(непосредственное нахождение корней квадратного уравнения).* Решая уравнение (2), найдем ее корни

$$t_1 = \frac{a+1-\sqrt{a^2+2a+17}}{2}, \quad t_2 = \frac{a+1+\sqrt{a^2+2a+17}}{2}.$$

Так как $a^2 + 2a + 17 = (a+1)^2 + 16 > (a+1)^2$, то первый корень t_1 всегда отрицателен, поэтому уравнение (2) не имеет корней на промежутке [1;3) тогда и только тогда, когда второй корень $t_2 < 1$ или $t_2 \ge 3$. Решим полученные неравенства:

$$t_2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+1+\sqrt{a^2+2a+17}}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2+2a+17} < 1-a \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a > 0 \\ a^2+2a+17 < (1-a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ a < -4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a < -4;$$

$$t_2 \ge 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+1+\sqrt{a^2+2a+17}}{2} \ge 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2+2a+17} \ge 5-a \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5-a < 0 \\ \begin{cases} 5-a \ge 0 \\ a^2+2a+17 \ge (5-a)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 5 \\ \begin{cases} a \le 5 \\ a \ge 2/3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad a \ge 2/3.$$

Объединяя решения двух последних неравенств, найдем $a \in (-\infty; -4) \cup [2/3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup [2/3; +\infty)$.

Анализ приведенных методов решения задачи показывает, что применительно к рассмотренной задаче наиболее простым и коротким является метод решения относительно параметра с последующим нахождением множества значений функции. Этот метод особенно эффективен, когда параметр входит в уравнение или неравенство линейно. В то же время, наиболее универсальным из всех приведенных методов является метод сведения задачи к исследованию расположения корней квадратного трехчлена, который с успехом применятся и в общем случае, когда параметр входит в квадратное уравнение или неравенство не только линейно. Как правило, графический метод применяется для исследования уравнений и неравенств, в одной части которых (например, левой) записана не зависящая от параметра функция, а в другой части – семейство хорошо известных функций, зависящих от параметра (например, линейных, квадратичных и т.д.). Метод непосредственного нахождения корней уравнения, часто квадратного, и последующего подчинения их условиям задачи в большинстве случаев приводит к большим объемам вычислений и преобразований, как правило, связанных с решениями нескольких иррациональных неравенств, в силу чего требует большого ресурса времени, внимания и терпения.

Все методы решения предыдущей задачи с небольшими изменениями и усложнениями применимы также для решения следующих задач.

Задача 2. Найдите все значения параметра a, для которых

а) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x^3 \neq a\log_{0,5} x - 9$ при всех $x \in [\frac{1}{16}; \frac{1}{2})$;

б) $4^x + 3\cdot 2^x + 9 \neq a\cdot 2^x$ при всех $x \in (0;2]$;

в) $x + 9 \neq (a-3)\sqrt{x}$ при всех $x \in (1;16]$;

г) $x^2 + (3-a)|x| + 9 \neq 0$ при всех $x \in [-4;-1)$;

д) $x^4 + 3x^2 + 9 \neq ax^2$ при всех $x \in [-2;-1)$;

е) $x^2 + 3x \neq ax - 9$ при всех $x \in (1;4]$.

Прежде всего, заметим, что все эти задачи, по сути, являются различными отражениями одной и той же задачи 2е. Действительно, первое неравенство 2а путем замены $t = \log_{0,5} x$ в силу равенства $\log_{0,5} x^3 = 3\log_{0,5} x$ приводится к неравенству $t^2 + 3t \neq at - 9$. Логарифмическая функция $t = \log_{0,5} x$ с основанием, меньшим 1, непрерывна и убывает на промежутке $[\frac{1}{16}; \frac{1}{2})$, поэтому при $x \in [\frac{1}{16}; \frac{1}{2})$ переменная t принимает все значения из промежутка $(\log_{0,5}\frac{1}{2};\ \log_{0,5}\frac{1}{16}] = (1;4]$. Тем самым, получаем задачу нахождения значений параметра a, для которых

$$t^2 + 3t \neq at - 9 \quad \text{при всех} \quad t \in (1;4], \tag{3}$$

полностью совпадающую с последней задачей 2е. Аналогично, посредством замен $t = 2^x$, $t = \sqrt{x}$, $t = |x|$ и $t = x^2$ к задаче (3) сводятся и остальные задачи 2б – 2д.

Решение задачи (3). Из (3) находим: $a \neq t + 3 + \frac{9}{t}$. Так как при $t \in (1;4]$ функция $y = t + 3$ возрастает, а функция $y = \frac{9}{t}$ убывает, то утверждать что-либо определенное о монотонности функции $y = t + 3 + \frac{9}{t}$ на промежутке $(1;4]$ в данном случае не удается, поэтому найдем множество значений этой функции, используя ее производную $y' = 1 - \frac{9}{t^2}$.

Сначала найдем наименьшее и наибольшее значения этой функции на отрезке $[1;4]$. На этом отрезке функция дифференцируема, так как имеет определенную на всем отрезке производную, поэтому она имеет там наименьшее и наибольшее значения, которые достигаются либо на концах отрезка, либо в критических точках, расположенных на отрезке. Найдем их: $y' = 0 \Leftrightarrow t = \pm 3$. Критическая точка $3 \in [1;4]$, а точка $-3 \notin [1;4]$. Так как $y(1) = 13$, $y(3) = 9$, $y(4) = 9{,}25$, то 9 – наименьшее, а 13 – наибольшее значение функции на отрезке $[1;4]$. Функция, как дифференцируемая, непрерывна на отрезке $[1;4]$, поэтому ее множество значений на нем есть отрезок от ее наименьшего до ее наибольшего значения, т.е. $[9;13]$. Так как наибольшее значение функции 13 принимается только при $t = 1$, то множество значений функции $y = t + 3 + \frac{9}{t}$ на промежутке $(1;4]$ есть промежуток $[9;13)$, и условие (3) выполняется тогда и только тогда, когда $a \notin [9;13)$, откуда получаем

Ответ: $a \in (-\infty; 9) \cup [13; +\infty)$.

Задачу (3) можно решать и другими приведенными выше методами, однако они менее рациональны по сравнению с изложенным. Советуем читателю самому убедиться в этом. Рассмотрим возможности использования этих методов для решения задач с параметром, связанных с неравенствами общего вида.

Задача 3. Найдите все значения параметра *a*, для которых неравенство $\log_2^2 x - a \geq a\log_2 x + 3$

а) выполняется при всех $x \in [1;4)$;

б) выполняется хотя бы для одного значения $x \in [1;4)$;

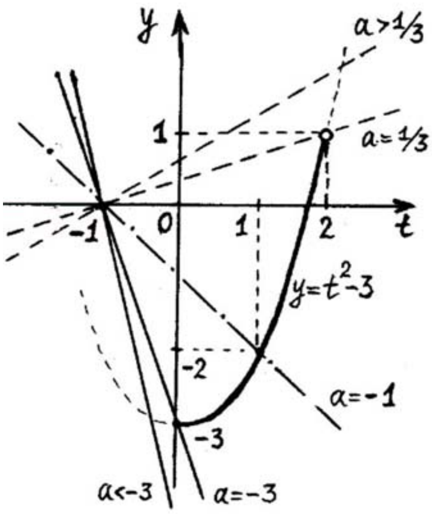
в) ни для одного значения x из промежутка $[1;4)$ не выполняется;

г) выполняется для некоторых значений x из промежутка $[1;4)$, среди которых имеются ровно два целых числа.

Решение графическим методом. Обозначив $t = \log_2 x$, получим неравенство

$$t^2 - a \geq at + 3 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 3 \geq a(t+1), \tag{4}$$

которое надо исследовать при $t \in [0;2)$, так как при $x \in [1;4)$ функция $t = \log_2 x$, как возрастающая и непрерывная, принимает все значения из промежутка $[\log_2 1; \log_2 4) = [0;2)$, и только их. Тогда задача равносильна нахождению значений параметра *a*, для которых неравенство (4) выполняется при всех $t \in [0;2)$ в случае 3а, хотя бы для одного $t \in [0;2)$ в случае 3б, ни для одного $t \in [0;2)$ не выполняется в случае 3в и выполняется для всех или некоторых значений $t \in [0;2)$, среди которых содержатся два из следующих трех чисел $\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 3$, соответствующих целым значениям x из промежутка $[1;4)$, в случае 3г.



В системе координат *Oty* построим часть параболы $y = t^2 - 3$ на промежутке $[0;2)$ и семейство прямых $y = a(t+1)$. Найдем значения параметра *a*, для которых прямая $y = a(t+1)$ проходит через концы $(0;-3)$, $(2;1)$ указанной части параболы и «среднюю» точку $(1;-2)$:

$a(0+1) = -3 \Leftrightarrow a = -3$; $\quad a(2+1) = 1 \Leftrightarrow a = 1/3$;

$a(1+1) = -2 \Leftrightarrow a = -1$.

Условию задачи 3а удовлетворяют те и только те прямые, которые расположены ниже указанной части параболы, или прямая, проходящая через ее «нижний» конец. Как видно из рисунка, это имеет место при $a \leq -3$.

Условию 3б удовлетворяют прямые, которые расположены ниже указанной части параболы или пересекают ее, что имеет место при $a < 1/3$.

Условию 3в удовлетворяют прямые, расположенные выше указанной части параболы, или прямая, проходящая через ее «верхний» конец, откуда $a \geq 1/3$.

Условию 3г удовлетворяют прямые, пересекающие указанную часть параболы и расположенные между прямыми, проходящими через «нижний» конец $(0;-3)$ и «среднюю» точку $(1;-2)$, включая последнюю. Это имеет место при $-3 < a \leq -1$.

Ответы: а) $(-\infty; -3]$; б) $(-\infty; 1/3)$; в) $[1/3; +\infty)$; г) $(-3; -1]$.

Заметим, что для решения задачи 3а достаточно было найти значение параметра *a*, для которого прямая $y = a(t+1)$ проходит только через «нижний» конец $(0;-3)$ части параболы, а для задач 3б и 3в – значение *a*, для которого прямая $y = a(t+1)$ проходит только через «верхний» конец $(2;1)$.

Задачу 3 можно решить и другими методами. Например, поделив обе части неравенства (4) на двучлен $t+1$, который при $t \in [0;2)$ положителен, получим равносильное неравенство

$$a \leq \frac{t^2 - 3}{t+1}. \tag{5}$$

На промежутке $[0;2)$ функция $f(t)=\frac{t^2-3}{t+1}=t-1-\frac{2}{t+1}$, как непрерывная и возрастающая, принимает значения из промежутка $[-3;1/3)$, поэтому в случае 3а неравенство (5) будет выполняться при всех $t\in[0;2)$ тогда и только тогда, когда a меньше любого из значений функции $f(t)$ на промежутке $[0;2)$ или равно ее наименьшему значению, т.е. $a\le -3$. Аналогично исследуются и другие случаи 3б – 3г.

Задача 4. Найдите все значения параметра *a*, для которых неравенство $x^2+a^2+1<(2a+3)\,|\,x\,|$

а) выполняется при всех значениях $x\in[-4;-2)$;

б) ни для одного значения x из промежутка $(2;4]$ не выполняется;

в) выполняется хотя бы для одного значения x из промежутка $[-4;-2)$ или $(2;4]$.

Решение. Обозначив $t=|\,x\,|$, в силу равенств $x^2=|\,x\,|^2=t^2$ запишем неравенство в виде

$$t^2-(2a+3)t+a^2+1<0. \qquad (6)$$

Как на промежутке $[-4;-2)$, так и на промежутке $(2;4]$ функция $t=|\,x\,|$ принимает одни и те же значения от 2 до 4 включительно. Следовательно, надо найти те значения параметра *a*, для которых квадратное неравенство (6) выполняется при всех $t\in(2;4]$ в случае 4а, ни для одного значения $t\in(2;4]$ не выполняется в случае 4б и выполняется хотя бы для одного значения $t\in(2;4]$ в случае 4в.

Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

а) Неравенство (6) выполняется для всех $t\in(2;4]$ тогда и только тогда, когда множество его решений содержит в себе промежуток $(2;4]$. Такое возможно лишь тогда, когда график функции $f(t)=t^2-(2a+3)t+a^2+1$ –парабола имеет следующие расположения:

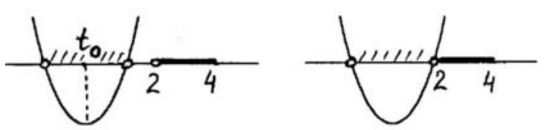
которые описываются аналитически системой неравенств

$$\begin{cases} f(2)\le 0 \\ f(4)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4a-1\le 0 \\ a^2-8a+5<0 \end{cases} \Leftrightarrow 4-\sqrt{11}<a\le 2+\sqrt{5}.$$

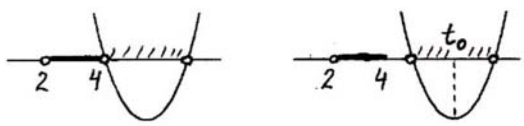
б) Дискриминант квадратного трехчлена $f(t)$ равен $D=12a+5$.

Если $D\le 0 \;\Leftrightarrow\; a\le -5/12$, то $f(t)\ge 0$ и неравенство (6) при всех t, значит, и при $t\in(2;4]$ не выполняется.

Если $D>0 \;\Leftrightarrow\; a>-5/12$, то неравенство (6) ни для одного значения $t\in(2;4]$ не выполняется тогда и только тогда, когда парабола $y=f(t)$ имеет следующие расположения:



или



Первые две параболы описываются аналитически системой неравенств

$$\begin{cases} D>0 \\ f(2)\ge 0 \\ t_0<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-5/12 \\ a^2-4a-1\ge 0 \\ a+1{,}5<2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{12}<a\le 2-\sqrt{5},$$

а последние две – системой

$$\begin{cases} D>0 \\ f(4)\ge 0 \\ t_0>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-5/12 \\ a^2-8a+5\ge 0 \\ a+1{,}5>4 \end{cases} \Leftrightarrow a\ge 4+\sqrt{11}.$$

Объединяя все случаи, находим $a\in(-\infty;\,2-\sqrt{5}]\cup[4+\sqrt{11};+\infty)$.

в) Данный случай является противоположным предыдущему, поэтому он имеет место, когда $a \notin (-\infty; 2-\sqrt{5}] \cup [4+\sqrt{11}; +\infty) \Leftrightarrow a \in (2-\sqrt{5}; 4+\sqrt{11})$.

Ответы: а) $(4-\sqrt{11}; 2+\sqrt{5}]$; б) $(-\infty; 2-\sqrt{5}] \cup [4+\sqrt{11}; +\infty)$; в) $(2-\sqrt{5}; 4+\sqrt{11})$.

Подобно рассмотренным выше задачам, в которых ограничения на участвующие в них функции возникают из-за ограничений, наложенных на аргументы функций, задачи того же характера возникают и при отсутствии явных ограничений на аргументы функций в силу естественной ограниченности самих функций, например, $\sin x$, $\sqrt{1-x^2}$, $\frac{2}{1+\sqrt{x}}$, $2^{|x|}$ и т.д.

Задача 5. Найдите все значения параметра *a*, для которых неравенство $\cos^2 x - a - 2 < (a+1)\cos x$

а) имеет хотя бы одно решение;

б) не имеет решений;

в) выполняется для всех x.

Решение. Пусть $t = \cos x$. Тогда

$$t^2 - a - 2 < (a+1)t \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - (a+1)t - a - 2 < 0. \tag{7}$$

Дискриминант квадратного трехчлена, записанного в левой части последнего неравенства, равен $D = (a+3)^2$, поэтому в данном случае проще найти корни этого трехчлена $t_1 = -1$, $t_2 = a+2$ и само решение неравенства (7). Им будет интервал между точкам $t_1 = -1$ и $t_2 = a+2$.

Так как $-1 \le \cos x \le 1$, то исходное тригонометрическое неравенство имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда неравенство (7) имеет хотя бы одно решение, принадлежащее отрезку $[-1;1]$. Это возможно лишь при $a+2 > -1 \Leftrightarrow a > -3$.

Если $a+2 \le -1 \Leftrightarrow a \le -3$, то неравенство (7) либо вообще не имеет решений (при $a=-3$), либо множество его решений не имеет ни одной общей точки с отрезком $[-1;1]$. Следовательно, в этом случае исходное неравенство также не имеет решений.

Для того, чтобы исходное неравенство выполнялось для всех x, необходимо, чтобы все числа t из промежутка $[-1;1]$ были решениями неравенства (7). Но $t=-1$, как корень квадратного трехчлена, ни при каких *a* не может быть решением этого неравенства, поэтому значений параметра *a*, для которых выполняется условие 5в нет.

Ответы: а) $(-3; +\infty)$; б) $(-\infty; -3]$; в) нет таких *a*.

Изложенные выше основные методы решения задач с параметрами, связанных с неравенствами, не исчерпывают все методы. Надеемся, знакомство с ними поможет читателю сориентироваться в выборе рационального метода решения задачи. Более подробно с изложенными методами решения неравенств с параметром, а также другими можно ознакомиться, например, по приведенным в конце статьи книгам.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите все значения параметра *a*, для которых

1) $4^{2x} + a \cdot 4^x \ne 4^x + 6$ при всех $x \in [0;1)$:
2) $9^x - 3^x \ne a \cdot 3^x - 4$ при всех $x \in [0;1)$;
3) $\log_3^2 x - 3\log_3 x^3 \ne a\log_3 x + 9$ при всех $x \in [\frac{1}{9}; \frac{1}{3})$;
4) $a^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} - 8 \ne 2(2-a)\sqrt[3]{x}$ при всех $x \in (-8; 27]$;
5) $a^2\, tg^2 x - a\, tg\, x \ne 1 + tg\, x$ при всех $x \in (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}]$;
6) $4^x - a \cdot 2^x \ne 2^x + 4$ при всех $x \le 2$;
7) $2\sqrt{x^2+9} + 4a \ne a\sqrt{x^2+9} - 4$ при всех значениях x.

Найдите все значения параметра a, для которых неравенство

8) $2^{2x}+a\cdot 2^x+a^2+6a<0$ выполняется при всех $x\in(0;1)$;

9) $x^2+3a^2+9a<(4a+3)|x|$ выполняется при всех $x\in[-3;-1]$;

10) $(x-a+3)(x-2a+1)^{-1}<0$ выполняется при всех $x\in(0;2)$;

11) $(x-3+a)(x+2a+1)\ge 0$ ни для одного значения $x\in[-1;2)$ не выполняется;

12) $3-|x-a|>x^2$ выполняется хотя бы при одном отрицательном значении x;

13) $(a-1)\lg^2 x<5+\lg x^3$ ни для одного значения $x<0{,}1$ не выполняется;

14) $\sqrt{4-x^2}<a-x$ не имеет решений;

15) $4^x-a\cdot 2^x-a+3\le 0$ имеет хотя бы одно решение;

16) $a\cdot 9^x+4(a-1)\cdot 3^x+a-1>0$ справедливо для всех значений x;

17) $a^2+a-\sin^2 x-2a\cos x>1$ выполняется при всех значениях x;

18) $\sin^2 x-2(a-1)\sin x+2a+1<0$ выполняется хотя бы при одном значении x;

19) $\cos^2 x-2a\cos x+a^2-1<0$ ни для одного значения x не выполняется;

20) $(a-1)tg^2x+(2a-3)tg\,x>3-a$ выполняется хотя бы при одном $x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4})$;

21) $|x+1|+|2x-3|<2a-x+2$ выполняется при всех $x\in[-1;2)$;

22) $\sqrt{1-x^2}\ge a+2x$ выполняется при всех $x\in[-1;1]$.

Ответы

1. $(-\infty;-1{,}5]\cup(6;+\infty)$. 2. $(-\infty;3)\cup(4;+\infty)$. 3. $(-\infty;-6{,}5)\cup[-1;+\infty)$. 4. $[0;1]$. 5. $[-1;0]$. 6. $(2;+\infty)$. 7. $(-10;2]$. 8. $[(-7-\sqrt{45})/2;-4+\sqrt{12}]$. 9. $(0;1/3)$. 10. $[1{,}5;3]$. 11. $(0;1]$. 12. $(-13/4;3)$. 13. $[3;+\infty)$. 14. $(-\infty;-2]$. 15. $[2;+\infty)$. 16. $[1;+\infty)$. 17. $(-\infty;(-3-\sqrt{13})/2)\cup((1+\sqrt{5})/2;+\infty)$. 18. $(-\infty;0)$. 19. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. 20. $(0{,}75;+\infty)$. 21. $[2;+\infty)$. 22. $(-\infty;-2]$.

Рекомендуемая литература

1. *Амелькин В.В., Рабцевич В.Л.* Задачи с параметрами. – Минск, 1996. 464 с.

2. *Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.* Задачи с параметрами. – Москва–Харьков, 1998. 336 с.

3. *Мочалов В.В., Сильвестров В.В.* Уравнения и неравенства с параметрами: Учебное пособие. 4-е изд., доп., перераб. – М., 2006. 192 с.

4. *Сильвестров В.В.* Множество значений функции: Учебное пособие. - Чебоксары, 2004. 64 с.