# Модуль и производная

*В.В. Сильвестров*

При решении некоторых задач приходится находить производную функции, содержащей один или несколько модулей. Такие задачи возможны и на едином государственном экзамене по математике [1, 2] (см также сайты ФИПИ и МО РФ http://fipi.ru, http://www.ege.edu.ru). Анализ результатов выполнения различных математических тестов и испытаний показывает, что многие ученики недостаточно хорошо владеют техникой нахождения производных указанных функций и не имеют навыков использования их при решении задач. Целью данной статьи является ознакомление с методами решения задач, основанных на использовании производной функции, содержащей модули.

Как правило, производная функции используется для нахождения промежутков монотонности, точек экстремумов, наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке, для чего, прежде всего, надо найти критические точки функции. Таковыми называются точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная функции либо не существует, либо существует и равна нулю. Если функция содержит модули, то точки, в которых выражения под модулями обращаются в нуль (нули подмодульных выражений), могут быть как раз теми критическими точками, в которых производная функции не существует. В то же время, эти точки могут и не быть критическим, т.е. функция может иметь в этих точках производную, причем не нулевую. Для выяснения вопроса существования производной функции в таких точках часто используется следующее свойство функции: *производная $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке $x_0$ существует тогда и только тогда, когда существуют совпадающие друг с другом левая и правая производные $f'(x_0-0)$ и $f'(x_0+0)$ функции в этой точке, при этом $f'(x_0)=f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$. Если же хотя бы одна из односторонних производных $f'(x_0-0)$, $f'(x_0+0)$ не существует или $f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0)$, то производная $f'(x_0)$ не существует*. Вопрос о существовании производной функции в точке можно решать также геометрически, построив график функции в окрестности рассматриваемой точки, но такое решение нельзя считать строгим, особенно, если график имеет нечетко выраженные очертания.

**Пример 1.** Найти критические точки функций:

а) $f(x)=x^2-|x|$; б) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot|x|$; в) $f(x)=(|x|+1)x$.

*Решение.* Область определения всех функций $D(f)=\boldsymbol{R}$.

а) Если $x>0$, то $f(x)=x^2-x$, откуда $f'(x)=2x-1$. Уравнение $f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 2x-1=0$ имеет корень $x=0{,}5$, который расположен на луче $x>0$, поэтому является критической точкой функции. Если $x<0$, то $f(x)=x^2+x$, $f'(x)=2x+1 \;\Rightarrow\; f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=-0{,}5$ – критическая точка функции, так как $-0{,}5<0$. Таким образом,

$$f'(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ 2x-1, & x>0.\end{cases} \tag{1}$$

Выясним, существует ли производная $f'(0)$? Найдем левую и правую производные

$$f'(0-0)=2\cdot 0+1=1,\qquad f'(0+0)=2\cdot 0-1=-1.$$

Так как $f'(0-0)\neq f'(0+0)$, то производная $f'(0)$ не существует, поэтому $x=0$ – критическая точка функции.

Геометрически отсутствие производной $f'(0)$ означает, что к графику функции $y=x^2-|x|$ в точке с абсциссой $x=0$ нельзя провести касательную (рис. 1).

Заметим, что в формуле (1) для производной функции обязательно аргумент $x$ должен быть отличным от нуля. Записи

$$f'(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 0,\\ 2x-1, & x>0,\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ 2x-1, & x\ge 0\end{cases}\quad -$$

не правильные, ибо $f'(0)$ не существует.

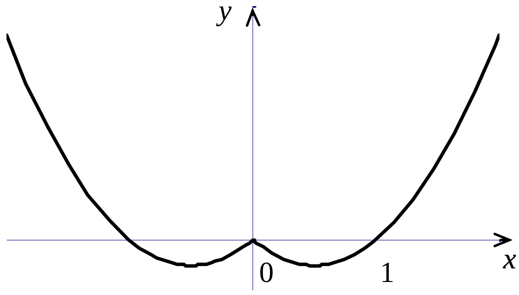


Рис. 1

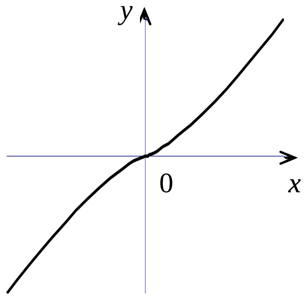


Рис. 2

б)

$$f(x)=\begin{cases}-x^{4/3}, & x<0,\\ x^{4/3}, & x>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases}-\frac{4}{3}x^{1/3}, & x<0,\\ \frac{4}{3}x^{1/3}, & x>0,\end{cases}$$

откуда $f'(0-0)=f'(0+0)=0$. Следовательно, производная $f'(0)$ существует и $f'(0)=0$. Так как при всех $x\ne 0$ производная $f'(x)\ne 0$, то $x=0$ – единственная критическая точка функции. Заметим, что это трудно увидеть на графике функции $y=\sqrt[3]{x}\cdot|x|$ (рис. 2).

В данном случае в формуле для производной можно брать $x=0$ и писать

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{4}{3}x^{1/3}, & x\le 0,\\ \frac{4}{3}x^{1/3}, & x>0\end{cases}\qquad\text{или}\qquad f'(x)=\begin{cases}-\frac{4}{3}x^{1/3}, & x<0,\\ \frac{4}{3}x^{1/3}, & x\ge 0.\end{cases}$$

в)

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+x, & x<0,\\ x^2+x, & x>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases}-2x+1, & x<0,\\ 2x+1, & x>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'(0-0)=f'(0+0)=1.$$

Следовательно, производная $f'(0)$ существует и $f'(0)=1$. При $x\ne 0$ производная $f'(x)$ также отлична от нуля, поэтому функция критических точек не имеет.

Выясним, насколько важен ответ на вопрос «Является ли та или иная точка критической» при решении задач, не связанных с непосредственным нахождением критических точек функции. Пусть $x_0$ – не критическая точка функции $f(x)$, т.е. $f'(x_0)$ существует и отлична от нуля. Тогда при переходе через точку $x_0$ производная $f'(x)$ не меняет знак, поэтому точка $x_0$ расположена строго внутри некоторого промежутка монотонности функции и, следовательно, не является ни точкой экстремума функции, ни точкой, где функция принимает наибольшее или наименьшее значение. Присоединение такой точки $x_0$ к критическим точкам функции при решении задач, связанных с монотонностью и экстремумами функции, а также задач, связанных с нахождением наибольшего и наименьшего значений функции, на процесс решения задачи и на ответ не влияет, а только увеличивает объем вычислительной работы. Точки, относительно которых неизвестно, являются ли они критическими или нет, можно назвать *подозрительными*.

**Пример 2.** Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции $y=4x^2+|x^2-2x-1|$.

*Решение.* Если $x^2-2x-1>0 \iff x\in(-\infty;1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2};+\infty)$, то $y=5x^2-2x-1$, $y'=10x-2$, откуда $y'=0$ при $x=0,2$. Так как $0,2\notin(-\infty;1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2};+\infty)$, то $x=0,2$ – не критическая точка функции.

Если $x^2-2x-1<0 \Leftrightarrow x\in(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2})$, то $y=3x^2+2x+1$, $y'=6x+2$ и $y'=0$ при $x=-1/3$. Значение $x=-1/3$ удовлетворяет неравенству $x^2-2x-1<0$, поэтому $x=-1/3$ – критическая точка функции. К этой точке присоединим еще точки $x=1\pm\sqrt{2}$ – корни уравнения $x^2-2x-1=0$, не исследуя их на «критичность». Из рис. 3, на котором расставлены знаки производной

$$y'=\begin{cases}10x-2, & x\in(-\infty;1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2};+\infty),\\ 6x+2, & x\in(1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}),\end{cases} \qquad (2)$$

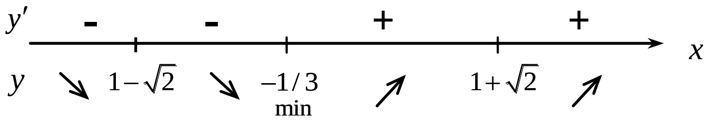


Рис. 3

видно, что на луче $(-\infty;-1/3]$ функция убывает, на луче $[-1/3;+\infty)$ она возрастает и точка $x=-1/3$ является точкой минимума функции.

На основании формулы (2) можно было бы показать, что точки $x=1\pm\sqrt{2}$ также являются критическими точками функции, но для решения примера 2 в этом нет необходимости. Более того, если бы мы причислили к критическим точкам еще и точку $x=0,2$, то это все равно на ответ не повлиял бы, так как при переходе через нее знак производной $y'$ не меняется, т.е наряду со схемой промежутков монотонностей и точек экстремумов функции, изображенной на рис. 3, является верной также и схема, изображенная на рис. 4.

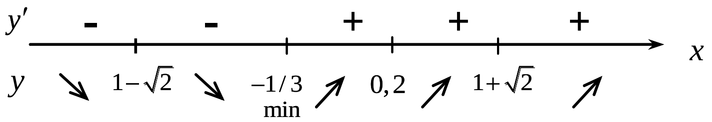


Рис. 4

Таким образом, при решении задач на монотонность, на экстремумы, на наибольшее и наименьшее значения функции, содержащей модули, надо сначала

– найти нули выражений, расположенных под модулями,

– раскрыть модули со знаками плюс, минус и найти нули производных полученных таким образом функций и точки, в которых эти производные не существуют,

и далее следовать стандартной схеме исследования функции, пропуская исследования по определению найденных подозрительных точек на «критичность». Если в задаче надо найти промежутки монотонности и точки экстремума функции, то надо отметить найденные подозрительные точки на числовой оси в пределах области определения функции и определить знаки производной в полученных промежутках. Если же надо найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, то надо найти значения функции на концах отрезка и в подозрительных точках, расположенных на отрезке, после чего выбрать из них наибольшее и наименьшее.

**Пример 3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=(x-1)|x+2|-5x$ отрезке $[-4;1]$.

*Решение.* Раскрыв модуль со знаками плюс и минус, получим

$$y=(x-1)(x+2)-5x=x^2-4x-2 \quad\Rightarrow\quad y'=2x-4,$$

$$y=(x-1)(-x-2)-5x=-x^2-6x+2 \quad\Rightarrow\quad y'=-2x-6.$$

Следовательно, критическими точками функции могут быть только корни уравнений $x+2=0$, $2x-4=0$, $-2x-6=0$, откуда $x=-2$, $x=2$, $x=-3$. На отрезке $[-4;1]$ расположены лишь две подозрительные точки $x=-3$ и $x=-2$, поэтому наибольшее и наименьшее значения функции на этом отрезке находятся среди ее значений в этих точках и на концах отрезка: $y(-4)=(-4-1)\cdot|-4+2|-5\cdot(-4)=10$, $y(-3)=11$, $y(-2)=10$, $y(1)=-5$, откуда находим искомые наибольше и наименьшее значения функции, равные 11 и $-5$ соответственно.

**Пример 4.** При каких значениях параметра *a* наименьшее значение функции $y=4|x+a|+|x^2-2x-3|$ меньше 4.

*Решение.* При больших положительных значениях *x* функция $y=x^2+2x+4a-3$, поэтому при $x\to+\infty$ она стремится к $+\infty$. При больших по модулю отрицательных значениях *x* функция $y=x^2-6x-4a-3$, поэтому при $x\to-\infty$ она также стремится к $+\infty$. Кроме того, функция всюду неотрицательна. Следовательно, наименьшее значение функции существует.

Раскрыв модули со знаками плюс и минус, получим

$$y=4(x+a)+x^2-2x-3=x^2+2x+4a-3 \quad\Rightarrow\quad y'=2x+2,$$

$$y=4(x+a)-x^2+2x+3=-x^2+6x+4a+3 \quad\Rightarrow\quad y'=-2x+6,$$

$$y=-4(x+a)+x^2-2x-3=x^2-6x-4a-3 \quad\Rightarrow\quad y'=2x-6,$$

$$y=-4(x+a)-x^2+2x+3=-x^2-2x-4a+3 \quad\Rightarrow\quad y'=-2x-2,$$

поэтому критическими точками могут быть только точки, в которых

$$x+a=0,\ x^2-2x-3=0,\ y'=0 \quad\Rightarrow\quad x=-a,\ x=-1,\ x=3.$$

Функция дифференцируема на числовой оси, кроме, быть может, перечисленных точек, поэтому по свойству дифференцируемой функции ее наименьшее значение находится среди ее значений $y(-a)=|a^2+2a-3|$, $y(-1)=4|a-1|$, $y(3)=4|a+3|$. Это наименьшее значение функции будет меньше 4 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из трех указанных значений функции меньше 4, т.е.

$$\left[\begin{array}{l}|a^2+2a-3|<4,\\ 4|a-1|<4,\\ 4|a+3|<4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4<a^2+2a-3<4,\\ -1<a-1<1,\\ -1<a+3<1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}-1-\sqrt{8}<a<-1+\sqrt{8},\ a\neq-1,\\ 0<a<2,\\ -4<a<-2\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad a\in(-4;-1)\cup(-1;2).$$

Задачу на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке можно решать проще и без использования производной, если функция является непрерывной кусочно-линейной, записанной посредством модулей. Например, функция

$$f(x)=k|x-a|+m|x-b|+\ldots+nx+c$$

на любом промежутке, на которые разбивается числовая ось точками $x=a$, $x=b$, …, является линейной или постоянной, поэтому ее графиком будет ломанная. Абсциссы вершин этой ломанной являются нулями выражений, расположенных внутри модулей, если даже некоторые модули находятся внутри других. Например, на рис. 5 изображен график функции $y=\big|2|x+1|-3\big|+2|x-3|+x-9$ – ломанная с вершинами в точках с абсциссами $x=-1$, $x=-2{,}5$, $x=0{,}5$ и $x=3$, являющимися нулями выражений $x+1$, $2|x+1|-3$ и $x-3$.

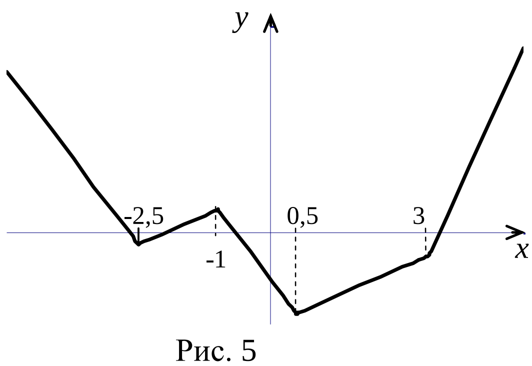


Рис. 5

Если непрерывная кусочно-линейная функция записана посредством модулей, то ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке всегда существуют и достигаются либо на концах отрезка, либо в нулях подмодульных выражений, расположенных на отрезке.

Наибольшее и наименьшее значения такой функции на всей числовой оси, оба или только одно, а также эти значения на луче могут существовать, а могут и нет. Если же они существуют, то на числовой оси они достигаются в нулях подмодульных выражений, а на луче – либо в начальной точке луча, либо в нулях подмодульных выражений, расположенных на луче. Геометрической интерпретацией приведенных свойств кусочно-линейной функции служат графики, изображенные на рис. 6.

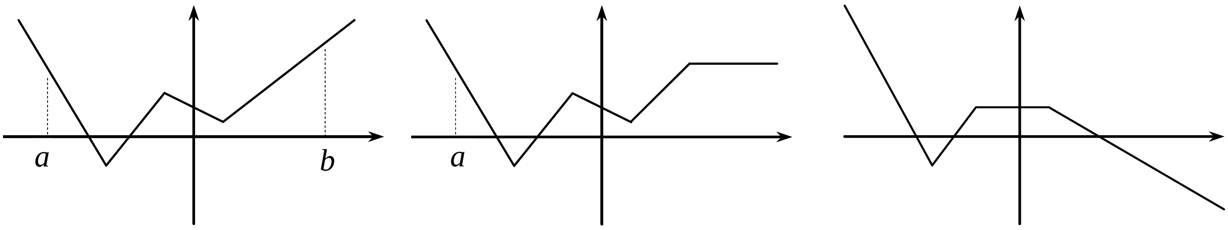


Рис. 6

**Пример 5.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \left|2|x+1|-3\right| + 2|x-3| + x - 9$

а) на отрезке $[-2;1]$; б) на луче $[0;+\infty)$; в) на всей числовой оси.

*Решение.* а) Нулями подмодульных выражений $x+1$, $2|x+1|-3$, $x-3$ являются точки $x=-2,5$, $x=-1$, $x=0,5$, $x=3$, из которых на отрезке $[-2;1]$ расположены лишь точки $x=-1$ и $x=0,5$. В этих точках и на концах отрезка $y(-2)=0$, $y(-1)=1$, $y(0,5)=-3,5$, $y(1)=-3$. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-2;1]$ равны 1 и $-3,5$ соответственно.

б) При больших положительных $x$ все модули раскрываются со знаком плюс и $y=5x-16$, откуда следует, что при $x\to+\infty$ функция стремится к $+\infty$, поэтому наибольшее значение функции на луче $[0;+\infty)$ не существует, а наименьше значение достигается либо в точке $x=0$, либо в точках $x=0,5$, $x=3$. Так как $y(0)=-2$, $y(0,5)=-3,5$, $y(3)=-1$, то искомое наименьшее значение функции равно $-3,5$.

в) При $x\to-\infty$, как и при $x\to+\infty$, функция стремится к $+\infty$, поэтому наибольшее значение функции на числовой оси не существует, а наименьшее значение, равное $-3,5$, достигается в точке $x=0,5$.

**Пример 6.** При каких значениях параметра *a* неравенство $|x+1|-2|x-a|<3-x$ выполняется для любого значения $x$.

*Решение.* Неравенство равносильно неравенству $f(x)<0$, где $f(x)=|x+1|-2|x-a|+x-3$. Неравенство $f(x)<0$ выполняется для любого значения $x$ тогда и только тогда, когда наибольшее значение функции $f(x)$ на числовой оси существует и меньше 0.

При больших положительных значениях $x$ функция $f(x)=x+1-2x+2a+x-3=2a-2$, т.е. принимает постоянное значение. При больших по абсолютной величине отрицательных значениях $x$ функция $f(x)=-x-1+2x-2a+x-3=2x-2a-4$, поэтому при $x\to-\infty$ стремится к $-\infty$. Следовательно, наибольшее значение функции на числовой оси существует и совпадает с одним из значений $f(-1)=-2|a+1|-4$, $f(a)=|a+1|+a-3$ функции в точках $x=-1$, $x=a$, т.е. $\max\limits_{x\in\boldsymbol{R}} f(x)=\max\{-2|a+1|-4;\ |a+1|+a-3\}$. По условию

$$\max\{-2|a+1|-4;\ |a+1|+a-3\}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}-2|a+1|-4<0,\\ |a+1|+a-3<0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad a<1.$$

*Задачи для самостоятельного решения*

1. Найдите критические точки функций

   а) $y = 2|x| + \sin x$;  б) $y = 1{,}2x - \sqrt[5]{x} \cdot |x|$.

2. Выясните, является ли точка $x = 0$ критической точкой функций

   а) $f(x) = x \cdot |\sin x|$;  б) $f(x) = x \cdot \ln(2 + |x|)$.

   Найдите значение производной $f'(0)$, если оно существует.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = 3x^2 - 7|x - 6|$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

   а) $f(x) = (x-4)|x|$ на отрезке $[-0{,}5;\ 3]$;  б) $f(x) = |2x^2 - x - 1| + |x^2 + x - 3|$ на отрезке $[-5;\ 2]$.

5. Найдите наименьшие значения функций

   а) $f(x) = x^2 - 2|x - 2|$;  б) $f(x) = |x - 1| - \sqrt{x+2}$;  в) $f(x) = x\big(|x-1| + |x+1|\big) + 3x^2$.

6. Найдите наибольшие значения функций

   а) $f(x) = 2x - 3x^2 + |x^2 - 2|$;  б) $f(x) = |2x + 4| - 6|x + 1| + |3x - 6|$.

7. При каких значениях параметра $a$ уравнение $5|x - 3a| + |x - a^2| + 4x - a = 0$ не имеет корней.

8. При каких значениях параметра $a$ уравнение $2\big||x-1|-2\big| = x + a - 1$ имеет хотя бы один корень.

9. При каких значениях параметра $a$ неравенства

   а) $x^2 - |x + a| - |x + 1| + 3 \geq 0$,  б) $2|x - a| + |x - 1| > 2x + 3$

   выполняются для всех значений $x$.

10. При каких значениях параметра $a$ наименьшее значение функции

    $f(x) = 3|x + a| + |x^2 - x - 2|$ меньше 2.

11. Решите неравенства

    а) $\min\limits_{x \in \boldsymbol{R}}\big(ax + |x^2 - 4x + 3|\big) > 1$;  б) $\max\limits_{x \in \boldsymbol{R}}\big(2|x - a - a^2| - |x + 3| - 2|x - 1|\big) < -1$.

*Ответы*

**1.** а) 0; б) $-1; 1$. **2.** а) Да, $f'(0) = 0$; б) нет, $f'(0) = \ln 2$. **3.** Убывает на $(-\infty; -7/6]$; возрастает на $[-7/6; +\infty)$. **4.** а) $-4; 0$; б) 1; 71. **5.** а) $-5$; б) $-\sqrt{3}$; в) $-1/3$. **6.** а) 2,25; б) 11. **7.** $(-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$. **8.** $[-2; +\infty)$. **9.** а) $[-2; 1]$; б) $(-\infty; -1{,}5)$. **10.** $(-8/3; -1) \cup (0; 5/3)$. **11.** а) $(1; 4 + 2\sqrt{2})$; б) $((-1-\sqrt{3})/2; (-1+\sqrt{3})/2)$.

*Литература*


1. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Экзамен, 2010. 56 с.
2. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010. Математика / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2010. 95 с.