Издательство «Легион»

Виды экономических задач на ЕГЭ
и способы их решения
(профильный уровень)

докладчик: Кулабухов Сергей Юрьевич

Спецификация КИМ ЕГЭ 2020 по математике (фрагмент)

17	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1, 6.3	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	П	3	–	35

Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по математике

6		**Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни**
	6.1	Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах
	6.2	Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках
	6.3	Решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения

Спецификация КИМ ЕГЭ 2020 по математике (фрагмент)

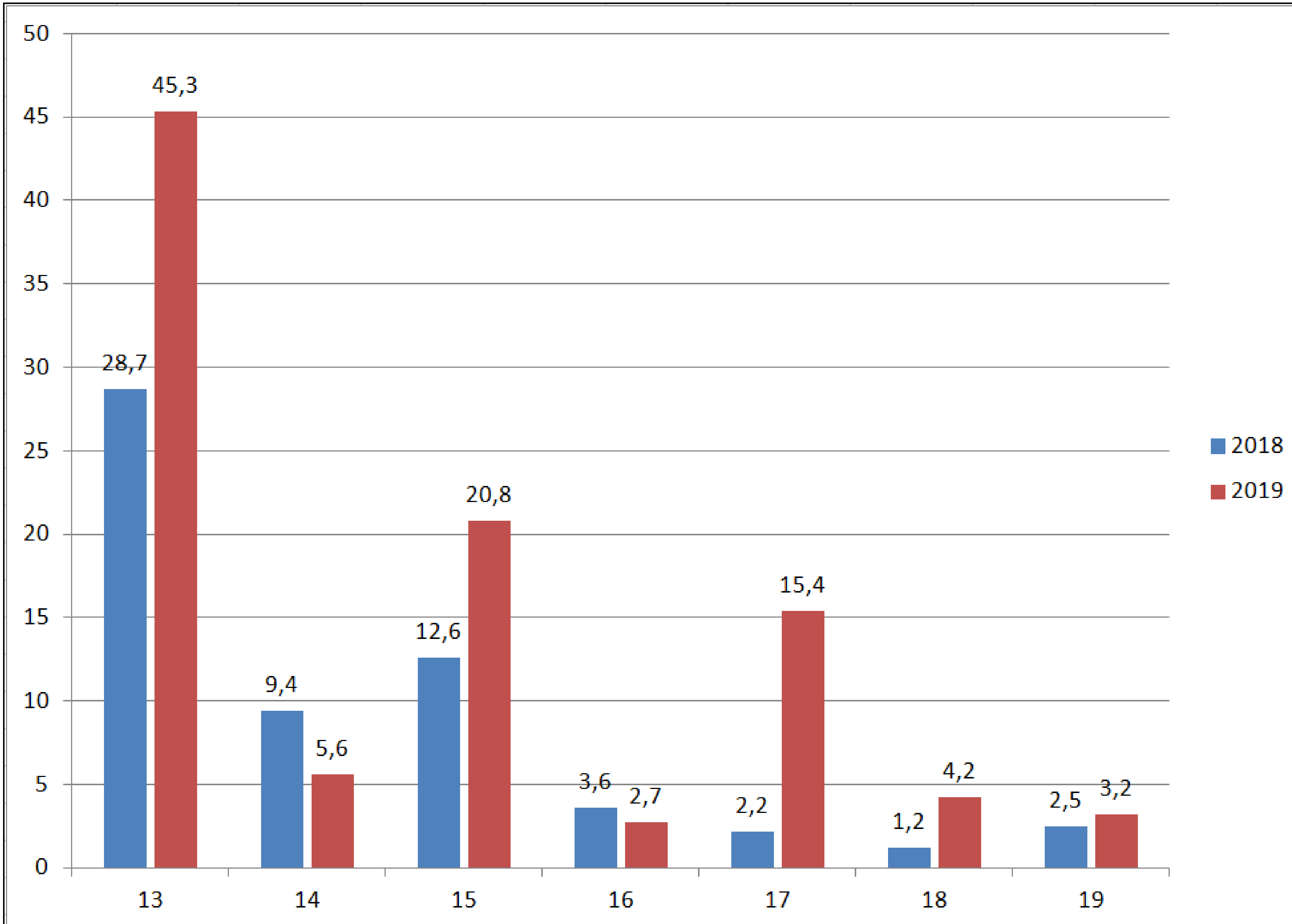
17	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1, 6.3	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	П	3	–	35

Кодификатор элементов содержания по МАТЕМАТИКЕ для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена

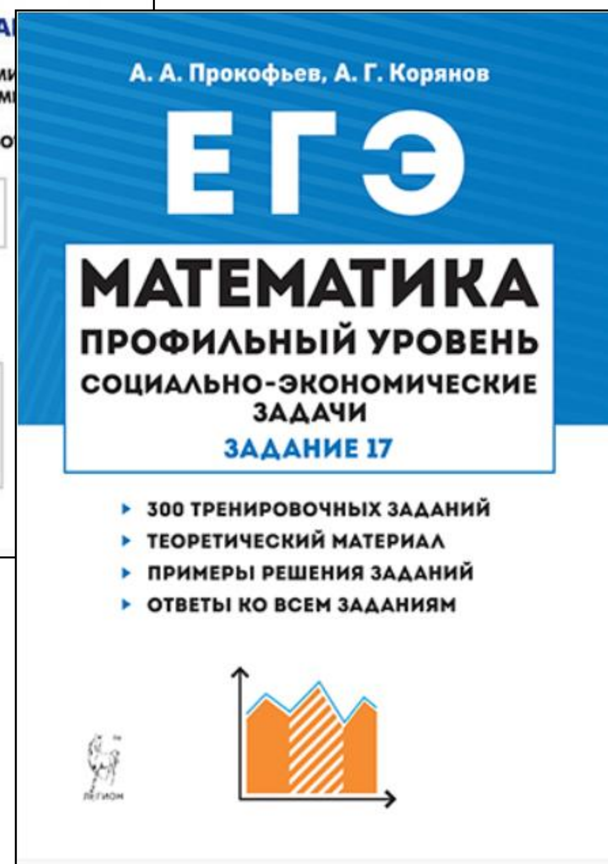
1		**Алгебра**
1.1		*Числа, корни и степени*
	1.1.1	Целые числа
	1.1.2	Степень с натуральным показателем
	1.1.3	Дроби, проценты, рациональные числа

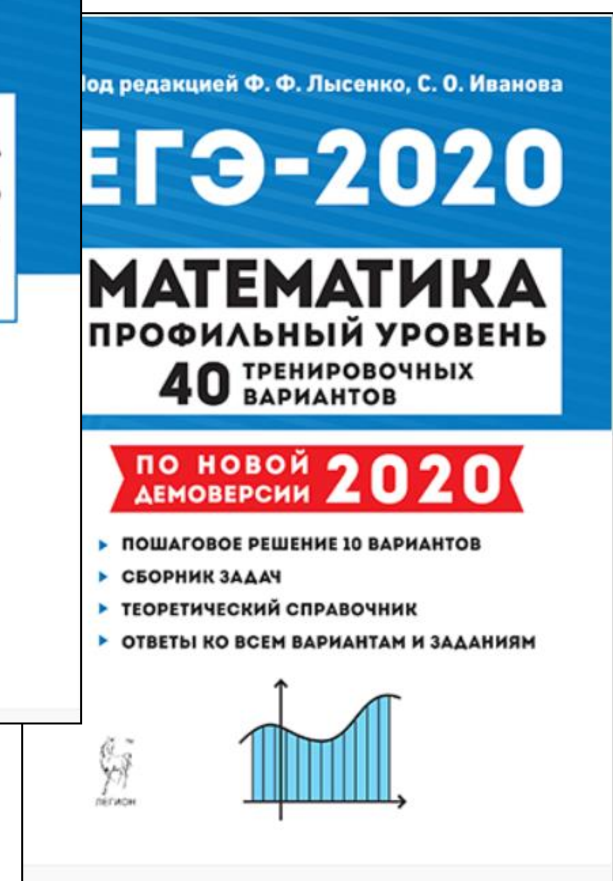
2.1.12	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений

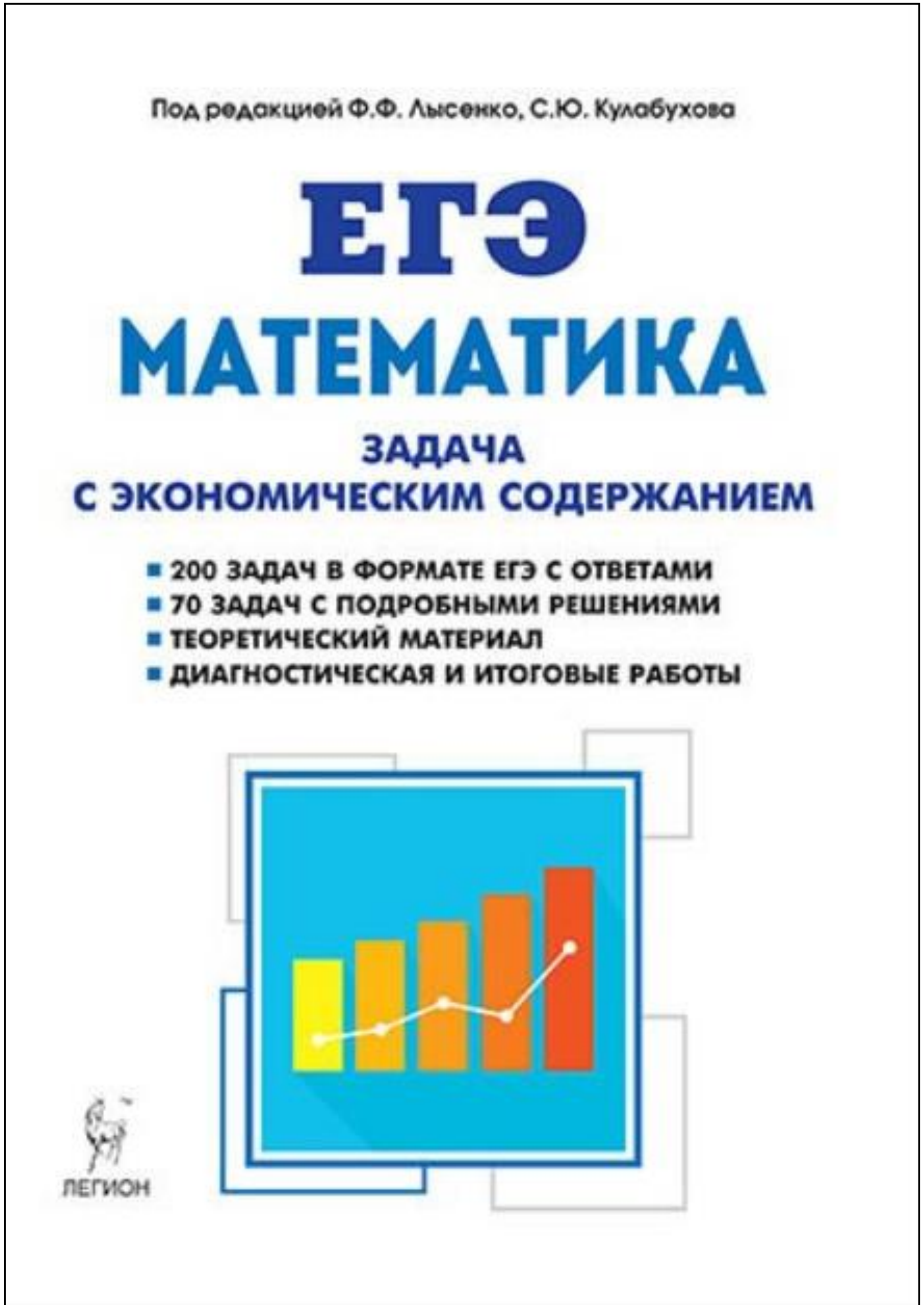
Выполнение заданий с развернутым ответом на профильном ЕГЭ по математике (средний процент выполнения)



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru







Оглавление

От авторов ....
Диагностическая работа ....
1. Проценты, доли и соотношения ....
2. Кредиты ....
3. Вклады ....
4. Производственные и бытовые задачи ..
5. Задачи на нахождение экстремума .....
Итоговые работы ....
Ответы ....
Литература ....

Проценты

Процент — это $\dfrac{1}{100}$ часть.

Если величина B равна $x\%$ от A, то

$$B = \frac{x}{100}A.$$

Если величина C увеличилась на x процентов, то она стала равняться

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)C.$$

Если величина C уменьшилась на x процентов, то она стала равняться

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)C.$$

Простые задачи

Задача Пирожок с мясом сто́ит на 50% дороже пирожка с джемом. На сколько процентов пирожок с джемом дешевле пирожка с мясом? Ответ округлите до целого числа процентов.

Решение. Пусть пирожок с джемом стоит x, тогда пирожок с мясом стоит $1{,}5x$. Ясно, что $\frac{x}{1{,}5x} = \frac{2}{3}$. То есть цена пирожка с джемом меньше цены пирожка с мясом на $\frac{1}{3}$ от цены пирожка с мясом, то есть на $0{,}3333\ldots$, или на $33{,}33\ldots\% \approx 33\%$.

Ответ: 33%.

Задача

Клиент взял в банке кредит 18 000 рублей на год под 14%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Решение. Клиент будет вносить ежемесячно

$$\frac{18\,000 \cdot 1{,}14}{12} = \frac{20\,520}{12} = 1710 \text{ (рублей).}$$

Ответ: 1710 рублей.

Кредиты и вклады

Задача 30 декабря 2014 года Сергей Михайлович взял в банке 800 000 рублей в кредит. План выплаты кредита — 30 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивают долг на 2%), затем Сергей Михайлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Сергей Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 360 000 рублей?

Решение.

Предположим, что первые месяцы Сергей Михайлович будет выплачивать ровно по $360\,000$ рублей.

После первого месяца:
$1{,}02 \cdot 800\,000 = 816\,000$ рублей,
$816\,000 - 360\,000 = 456\,000$ рублей.

После второго месяца:
$1{,}02 \cdot 456\,000 = 465\,120$ рублей,
$465\,120 - 360\,000 = 105\,120$ рублей.

После третьего месяца:
$1{,}02 \cdot 105\,120 = 107\,222{,}4$ рублей,
$107\,222{,}4 - 107\,222{,}4 = 0$.

Ответ: 3

17 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

Решение

Пусть x — размер первоначального вклада в млн рублей.

Год	Вклад	
	в начале года	в конце года
1	x	$1{,}1x$
2	$1{,}1x$	$1{,}1^2x$
3	$1{,}1^2x + 3$	$1{,}1(1{,}1^2x + 3) = 1{,}1^3x + 3{,}3$
4	$1{,}1^3x + 3{,}3 + 3 = 1{,}1^3x + 6{,}3$	$1{,}1(1{,}1^3x + 6{,}3) = 1{,}1^4x + 6{,}93$

Необходимо найти наибольшее целое решение неравенства:

$$1{,}1^4x + 6{,}93 < 25 \qquad x < \frac{25 - 6{,}93}{1{,}1^4} = \frac{18{,}07}{1{,}4641} \approx 12{,}3$$

Наибольшее целое решение этого неравенства $x = 12$.

Ответ: 12 млн рублей.

Задача

Клиент взял 15 960 000 рублей в кредит под 30% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 30%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Пусть искомый ежегодный платёж — x рублей.

Долг в конце первого года:
$1{,}3 \cdot 15960000 - x = (20748000 - x)$ рублей.

В конце второго:
$(1{,}3 \cdot (20\,748\,000 - x) - x) = 26\,972\,400 - 2{,}3x$ рублей.

В конце третьего:
$1{,}3(26\,972\,400 - 2{,}3x) - x = 35\,064\,120 - 3{,}99x$ рублей.

$35\,064\,120 - 3{,}99x = 0$
$x = 8\,788\,000$

Ответ: 8 788 000 рублей

Задача

Двадцать пятого ноября 2013 года Иван взял в банке 2 млн рублей в кредит. План выплаты кредита такой: 25 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, то есть увеличивает долг на $x\%$, а затем Иван переводит очередной транш. Иван выплатил кредит за 2 транша, переведя в первый раз 1 210 000 рублей, а во второй — 1 219 800 рублей. Под какой годовой процент банк выдал кредит Ивану?

Решение.

После первого года

$$\left(2\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) - 1\,210\,000\right) \text{ рублей.}$$

После второго года

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \left(2\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) - 1\,210\,000\right) - 1\,219\,800 = 0$$

Сделаем замену $y = \left(1 + \frac{x}{100}\right)$ $(y > 1)$ и разделим обе части на 200:

$$y \cdot \left(10\,000y - 6050\right) = 6099,$$

$$y \cdot \left(10\,000y - 6050\right) = 6099,$$
$$10\,000y^2 - 6050y - 6099 = 0.$$

$D = 50^2 \cdot 5^2 \cdot 4489.$

Отсюда

$$y_{1,2} = \frac{6050 \pm 50 \cdot 5 \cdot \sqrt{4489}}{2 \cdot 10\,000} = \frac{121 \pm 5 \cdot 67}{400} = \frac{121 \pm 335}{400}.$$

$y = \dfrac{456}{400} = \dfrac{114}{100} = 1{,}14$, откуда $x = 14$.

Ответ: 14.

Задача

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 18 млн рублей?

Решение

n — срок кредита (целое число лет).
Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$10,\ \frac{10(n-1)}{n}, \ldots,\ \frac{10\cdot 2}{n},\ \frac{10}{n},\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$12,\ \frac{12(n-1)}{n}, \ldots,\ \frac{12\cdot 2}{n},\ \frac{12}{n},\ 0.$$

Последовательность процентов на остаток долга

$$2,\ \frac{2(n-1)}{n}, \ldots\ \frac{2\cdot 2}{n},\ \frac{2\cdot 1}{n}$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$2 + \frac{10}{n},\ \frac{2(n-1)+10}{n}, \ldots,\ \frac{4+10}{n},\ \frac{2+10}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$10+2\cdot\left(\frac{n+(n-1)+\ldots+2+1}{n}\right) = 10+2\cdot\frac{n+1}{2} = n+11 (\text{млн рублей}).$$

Общая сумма выплат равна 18 млн рублей, поэтому $n = 7$.

Ответ: 7.

Задача

15 января планируется взять кредит в банке на два года. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа последующего месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца, последующего за месяцем получения кредита, долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение. Пусть K — сумма кредита.
Эта сумма будет ежемесячно уменьшаться на одну и ту же сумму, равную $\frac{K}{24}$,
поэтому на каждое 15-е число сумма долга составляет:

$$K,\ \frac{23}{24}K,\ \frac{22}{24}K,\ \ldots,\ \frac{2}{24}K,\ \frac{1}{24}K,\ 0.$$

Выплаты по кредиту со 2-го по 14-е число, будут, начиная с последующего месяца за месяцем получения кредита, таковы:

$$K\cdot\frac{r}{100}+\frac{K}{24},\ \frac{23}{24}K\cdot\frac{r}{100}+\frac{K}{24},\ \frac{22}{24}K\cdot\frac{r}{100}+\frac{K}{24},\ \ldots,$$

$$\frac{2}{24}K\cdot\frac{r}{100}+\frac{K}{24},\ \frac{1}{24}K\cdot\frac{r}{100}+\frac{K}{24}.$$

Сумма всех выплат равна

$$K+\frac{K}{24}\cdot\frac{r}{100}\cdot(24+23+22+\ldots+2+1)=$$

$$=K\cdot\left(1+\frac{r}{24\cdot100}\cdot\frac{25\cdot24}{2}\right)=K\cdot\left(1+\frac{r}{8}\right).$$

В соответствии с условием составим пропорцию:

K — 100%;

$K\cdot\left(1+\frac{r}{8}\right)$ — 125%.

Отсюда $K\cdot125\%=K\cdot\left(1+\frac{r}{8}\right)\cdot100\%$,

$$1+\frac{r}{8}=\frac{5}{4},\ \boxed{r=2.}$$

Ответ: 2.

17. 15 декабря планируется взять кредит в банке на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 25-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 2400 тысяч рублей?

Решение

Пусть 15-го числа 25-го месяца долг составит B тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число каждого месяца должен уменьшиться до нуля следующим образом:

$$B + 40 \cdot 25;\ B + 40 \cdot 24;\ B + 40 \cdot 23;\ \ldots;\ B + 40;\ B;\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}02(B + 1000);\ 1{,}02(B + 960);\ \ldots;\ 1{,}02(B + 40);\ 1{,}02B.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$0{,}02(B + 1000) + 40;\ 0{,}02(B + 960) + 40;\ \ldots;\ 0{,}02(B + 40) + 40;\ 1{,}02B.$$

Всего следует выплатить

$$25 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{2B + 1040}{2} + 1000 + 1{,}02B = 1{,}52B + 1260 \text{ (тыс. рублей)},$$

откуда $1{,}52B + 1260 = 2400;\ 1{,}52B = 1140;\ B = 750.$

Значит, 15-го числа 25-го месяца долг составит 750 тыс. рублей.

Ответ: 750 тысяч рублей.

Задача

15-го января был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг (ТД) выражается в процентах от кредита.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
ТД	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 4%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение:

Пусть S — сумма кредита; $x_1, x_2, \ldots, x_6$ — выплаты в первой половине февраля, марта и т.д. Составим уравнения, которые отражают график погашения кредита.

$$\text{На } 15.02: \quad 1{,}04S - x_1 = 0{,}9S,$$

$$\text{На } 15.03: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}9S - x_2 = 0{,}8S,$$

$$\text{На } 15.04: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}8S - x_3 = 0{,}7S,$$

$$\text{На } 15.05: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}7S - x_4 = 0{,}6S,$$

$$\text{На } 15.06: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}6S - x_5 = 0{,}5S,$$

$$\text{На } 15.07: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}5S - x_6 = 0.$$

Сложим все уравнения.

$$1{,}04S\cdot(1+0{,}9+\ldots+0{,}5)-(x_1+x_2+\ldots+x_6) = S\cdot(0{,}9+0{,}8+\ldots+0{,}5).$$

Пусть $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_6$ — общая сумма выплат.

Поскольку $5 + 6 + \ldots + 9 = \dfrac{5+9}{2}\cdot 5 = 35$, имеем уравнение

$$1{,}04S \cdot 4{,}5 - X = S \cdot 3{,}5,$$

$$X = S \cdot (1{,}04 \cdot 4{,}5 - 3{,}5) = 1{,}18S.$$

Таким образом, общая сумма выплат на 18% больше суммы самого кредита.

Ответ: 18.

2-й способ

$$0{,}04 \cdot (S + 0{,}9S + 0{,}8S + 0{,}7S + 0{,}6S + 0{,}5S) = 0{,}04 \cdot 4{,}5\,S = 0{,}18S.$$

Переплата составит 18%.

Ответ: 18

Свойства функций и экстремальные значения

Задача Крупный бизнесмен является владельцем двух заводов, выпускающих одинаковую продукцию. На втором заводе используется более современное оборудование, позволяющее за одинаковое время с первым заводом производить больше продукции, чем на первом заводе. Известно, что если рабочие первого завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $2t$ единиц товара. А если рабочие второго завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $5t$ единиц товара. На обоих заводах за каждый час работы рабочему платят 500 рублей. Какое наибольшее число единиц продукции можно будет выпустить на обоих заводах при условии, что заработную плату на предстоящую неделю можно будет выплатить в размере 1 450 000 рублей?

Решение:

Пусть суммарное недельное рабочее время на первом заводе равно x^2, а на втором заводе y^2. Тогда, согласно условию задачи, на заводах произведут соответственно $2x$ и $5y$ единиц продукции, а суммарное количество будет $K = 2x + 5y$. Согласно условию, за эту работу надо оплатить рабочим сумму $(x^2 + y^2) \cdot 500$ рублей. Так как есть возможность оплатить 1 450 000 рублей, то

$$(x^2 + y^2) \cdot 500 = 1\ 450\ 000,$$

$$x^2 + y^2 = 2900,\ y^2 = 2900 - x^2,$$

$$K(x) = 2x + 5y = 2x + 5 \cdot \sqrt{2900 - x^2}.$$

Найдем наименьшее значение K(x) с помощью производной.

$$K'(x) = 2 - \frac{5 \cdot 2x}{2\sqrt{2900 - x^2}},$$

$$K'(x) = 0,\ 2 - \frac{5x}{2900 - x^2} = 0,$$

$$2\sqrt{2900 - x^2} = 5x,\ 4(2900 - x^2) = 25x^2,\ x^2 = 400,\ x = 20.$$

Заметим, что $K'(x) > 0$ при $x < 20$ и $K'(x) < 0$ при $x > 20$, поэтому в точке $x = 20$ будет наибольшее значение.

$$y = \sqrt{2900 - x^2},\ y = 50,$$

$$K(20) = 2 \cdot 20 + 5 \cdot 50 = 290.$$

Ответ: 290.

17 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят k^2 тыс. рублей в конце года k ($k = 1; 2; \ldots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Решение №1

Пусть $f(k) = k^2(1+r)^{25-k}$ — сумма, которая будет на счету пенсионного фонда в конце 25 года, если ценные бумаги были проданы в конце k-го года ($k = 1; 2; 3; \ldots; 25, r > 0$).

Для поиска нужных значений r необходимо решить систему неравенств

$$\begin{cases} f(21) > f(k), \quad k \neq 21. \end{cases} \qquad (*)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2(1+r)^{25-x}$ и исследуем её поведение при $x > 0$.

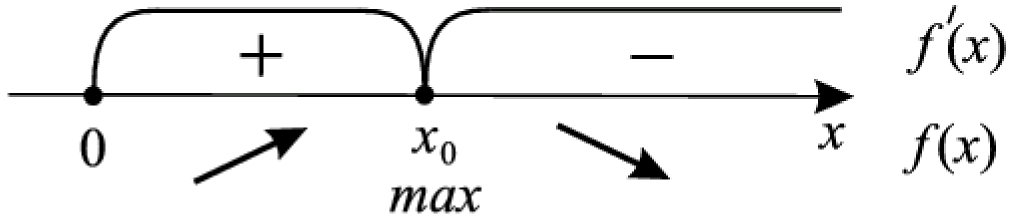
$$f'(x) = 2x(1+r)^{25-x} + x^2(1+r)^{25-x}\ln(1+r)\cdot(-1) = (1+r)^{25-x}(2x - x^2\ln(1+r))$$

$$(1+r)^{25-x}(2x - x^2\ln(1+r)) = 0$$

$$2x - x^2\ln(1+r) = 0 \qquad \text{(так как } (1+r)^{25-x} > 0)$$

$$2 - x\ln(1+r) = 0 \qquad \text{(так как } x > 0)$$

$x_0 = \dfrac{2}{\ln(1+r)}$ — единственная стационарная точка.



Из рисунка видно, что $x_0 = \dfrac{2}{\ln(1+r)}$ — единственная точка экстремума, точка максимума функции $f(x)$.

Учитывая $(*)$ и свойства функции $f(x)$ можно сказать, что $20 < x_0 < 22$. Кроме того, выполняются неравенства

$$f(1) < f(2) < \ldots < \underline{f(20) < f(21) > f(22)} > \ldots > f(25).$$

Следовательно, условие того, что ценные бумаги нужно продавать именно в конце 21-го года

$$\begin{cases} f(21) > f(20), \\ f(21) > f(22), \end{cases}$$

так как все остальные неравенства из системы $(*)$ являются следствиями этих двух.

$$\begin{cases} f(21) > f(20), \\ f(21) > f(22), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21^2(1+r)^{25-21} > 20^2(1+r)^{25-20}, \\ 21^2(1+r)^{25-21} > 22^2(1+r)^{25-22}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{21}{20}\right)^2 > 1+r, \\ 1+r > \left(\dfrac{22}{21}\right)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r < \left(\dfrac{21}{20}\right)^2 - 1, \\ r > \left(\dfrac{22}{21}\right)^2 - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} r < \dfrac{41}{400}, \\ r > \dfrac{43}{441}. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{43}{441} < r < \dfrac{41}{400}$.

Решение №2

Пусть $f(k) = k^2(1+r)^{25-k}$ — сумма, которая будет на счету пенсионного фонда в конце 25 года, если ценные бумаги были проданы в конце k-го года ($k = 1; 2; 3; \ldots; 25,\ r > 0$).

Рассмотрим неравенство $f(k) < f(k+1)$.

$$k^2(1+r)^{25-k} < (k+1)^2(1+r)^{25-(k+1)}$$

$$k^2(1+r) < (k+1)^2$$

$$k^2 + rk^2 < k^2 + 2k + 1$$

$$rk^2 - 2k - 1 < 0$$

Пусть $k_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+r}}{r}$ — корни уравнения $rk^2 - 2k - 1 = 0$. Тогда

$\dfrac{1-\sqrt{1+r}}{r} < k < \dfrac{1+\sqrt{1+r}}{r}$ — решение неравенства $f(k) < f(k+1)$.

Таким образом,

$$\begin{cases} f(k) < f(k+1), \text{ при } 0 < k < \dfrac{1+\sqrt{1+r}}{r}, \\ f(k) \geqslant f(k+1), \text{ при } k \geqslant \dfrac{1+\sqrt{1+r}}{r}. \end{cases}$$

Из условия задачи следует, что положительный корень уравнения $rk^2-2k-1=0$ должен удовлетворять неравенству $20 < \dfrac{1+\sqrt{1+r}}{r} < 21.$

Отсюда, $\begin{cases} y(20) < 0, \\ y(21) > 0, \end{cases}$ где $y(k) = rk^2 - 2k - 1.$

$$\begin{cases} 20^2 r - 2\cdot 20 - 1 < 0, \\ 21^2 r - 2\cdot 21 - 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} r < \dfrac{41}{20^2}, \\ r > \dfrac{43}{21^2}. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{43}{441} < r < \dfrac{41}{400}.$

17 В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение 1

Пусть x_i часов затратили в i-ой области на производство алюминия и y_i часов — на производство никеля. Тогда всего было получено $0{,}1x_1 + \sqrt{x_2} + 0{,}1y_1 + \sqrt{y_2}$ килограммов сплава. Необходимо найти максимум этого выражения при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 200, \\ x_2 + y_2 = 200, \\ 0{,}1x_1 + \sqrt{x_2} = 3(0{,}1y_1 + \sqrt{y_2}). \end{cases} \qquad \text{(сплав } 3:1\text{)}$$

Так как $y_1 = 200 - x_1$ и $y_2 = 200 - x_2$, то

$$f = 0{,}1x_1 + \sqrt{x_2} + 0{,}1y_1 + \sqrt{y_2} =$$
$$= 0{,}1x_1 + \sqrt{x_2} + 0{,}1(200 - x_1) + \sqrt{200 - x_2} =$$
$$= 20 + \sqrt{x_2} + \sqrt{200 - x_2}.$$

Таким образом, необходимо найти наибольшее значение функции $f(x_2) = 20 + \sqrt{x_2} + \sqrt{200 - x_2}$ на отрезке $x_2 \in [0; 200]$.

$$f'(x_2) = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \frac{1}{2\sqrt{200 - x_2}} = 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{\sqrt{200 - x_2}};$$

$$x_2 = 200 - x_2;$$

$$x_2 = 100.$$

Так как $x_2 = 100$ — единственная точка максимума на отрезке $[0; 200]$, то наибольшее количество сплава равно $f(100) = 20 + \sqrt{100} + \sqrt{200 - 100} = 40$ (кг).

Ответ: 40.

Замечание 1. Условие — соотношение алюминия и никеля в сплаве равно $3:1$ — при решении никак не используется. Видимо, это связано с тем, что в первой области производительности при производстве обоих металлов одинаковые и всё определяется производством во второй области.

Условие $3:1$ нужно, например, для получения плана производства по областям. Если $x_2 = 100$, то $y_2 = 100$ и система

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 200, \\ 0{,}1x_1 + \sqrt{100} = 3(0{,}1y_1 + \sqrt{100}) \end{cases}$$

имеет решение $x_1 = 200$, $y_1 = 0$. Значит, в первой области производят 20 кг алюминия и 0 кг никеля, а во второй — по 10 кг алюминия и никеля. Но в задаче не требуется узнать план производства!

Замечание 2. Если бы в первой области производительности алюминия и никеля были бы разными, то это существенно усложнило бы решение и, в этом случае, соотношение металлов в сплаве потребовалось бы для решения. Действительно, пусть в первой области рабочий добывает a кг алюминия и b кг никеля за 1 час и $a \neq b$. Тогда

$$f = ax_1 + \sqrt{x_2} + by_1 + \sqrt{y_2} =$$
$$= ax_1 + \sqrt{x_2} + b(200 - x_1) + \sqrt{200 - x_2} =$$
$$= 200b + (a - b)x_1 + \sqrt{x_2} + \sqrt{200 - x_2}. \qquad (*)$$

В этом выражении переменная x_1 не исчезает и тут уже требуется соотношение металлов в сплаве (как в условии берём соотношение $3 : 1$) $ax_1 + \sqrt{x_2} = 3(by_1 + \sqrt{y_2})$. Отсюда,

$ax_1 + \sqrt{x_2} = 3(b(200 - x_1) + \sqrt{200 - x_2})$. Это линейное относительно x_1 уравнение. Из него выражаем x_1 и подставляем в $(*)$. Получим $f = f(x_2)$. Далее — стандартное продолжение.

Решение 2

1) В 1-ой области можно добыть максимум $20 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 20$ кг металла в сутки.

2) Пусть во 2-ой области добывают x кг алюминия и y кг никеля в сутки. Тогда, так как $x^2 + y^2 \leqslant 20 \cdot 10 = 200$, то

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2 - (x-y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant 400.$$

Отсюда $x + y \leqslant 20$. Это означает, что 2-я область добывает не более 20 кг металла в сутки, причём максимум 20 кг достигается при $x = y$, то есть при добыче 10 кг алюминия и 10 кг никеля.

3) Так как для сплава алюминия нужно в 3 раза больше, чем никеля,то на добытые во 2-ой области 10 кг никеля требуются 30 кг алюминия. Из них 10 кг алюминия добыты в самой 2-ой области. Оставшиеся 20 кг должна дать 1-я область, полностью сосредоточившись на добыче алюминия. Итого 40 кг сплава.

Ответ: 40.

Задача

Зависимость объема Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 12000 - P$, $2000 \leqslant P \leqslant 12000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $2500Q + 1\,000\,000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 60%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение:

Прибыль:

$$f(P) = PQ - (2500Q + 1\,000\,000) = -P^2 + 14500P - 31\,000\,000$$

Пусть первоначальная цена равнялась P_0. После снижения на 60% цена стала равняться $0{,}4P_0$. Графиком функции $y = f(P)$ является парабола с ветвями, направленными вниз, поэтому наибольшее значение прибыль будет достигать в вершине параболы. Так как $f(P_0) = f(0{,}4P_0)$, то вершина параболы будет находиться в точке $\dfrac{P_0 + 0{,}4P_0}{2} = 0{,}7P_0$. Это означает, что нужно увеличить цену товара с $0{,}4P_0$ до $0{,}7P_0$, то есть на $\dfrac{0{,}7P_0 - 0{,}4P_0}{0{,}4P_0} \cdot 100\% = 75\%$.

Ответ: 75.

Книги можно заказать в нашем интернет-магазине на сайте: **www.legionr.ru**

Спрашивайте
в книжных магазинах города!

Издательство регулярно проводит онлайн-семинары авторов пособий с педагогами. По завершении каждого вебинара участники получают электронные сертификаты. Ссылки для участия вы сможете найти на сайте издательства www.legionr.ru

Все вебинары издательства «Легион» носят обучающий характер

legionrus@legionrus.com

Вступайте в группу

«Издательство «Легион»

Вконтакте, на одноклассниках

и в сети facebook.

Видео вебинаров смотрите на YouTube.

Адрес для корреспонденции:
344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550

Спасибо за внимание!